



Modelamiento matemático y análisis oscilatorio del péndulo físico

Mathematical modeling and oscillatory analysis of the physical pendulum

Modelagem matemática e análise oscilatória do pêndulo físico

Marlon Ernesto Moscoso-Martínez ^I
marlon.moscoso@epoch.edu.ec
<https://orcid.org/0000-0001-5182-3099>

Jorge Vicente Vivanco-Román ^{II}
jvvivancor@unl.edu.ec
<https://orcid.org/0000-0003-0887-2148>

Luis Calle-Samaniego ^{III}
luisjeam@hotmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-7673-4989>

Dayana Chaglla-Supe ^{IV}
dayanachagllasupe@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0001-6678-6809>

Correspondencia: marlon.moscoso@epoch.edu.ec

Ciencias Matemáticas
Artículo de Investigación

***Recibido:** 02 de enero de 2022 ***Aceptado:** 20 de enero de 2022 * **Publicado:** 10 de febrero de 2022

- I. Master Universitario en Investigación Matemática, Ingeniero en Electrónica y Control, Universitat Politècnica de València, Valencia, España, Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH), Riobamba, Ecuador.
- II. Master Universitario en Investigación Matemática, Licenciado en Ciencias de la Educación Mención Físico Matemáticas, Universidad Nacional de Loja (UNL), Loja, Ecuador.
- III. Universitat Politècnica de València, Valencia, España.
- IV. Universitat Politècnica de València, Valencia, España.

Resumen

En este artículo, se presenta la construcción del modelo matemático del sistema del péndulo físico y se estudia su comportamiento oscilatorio. Se consideran cuatro variables en el sistema: posición angular, velocidad, gravedad y longitud de la cuerda que sostiene la masa del péndulo. La solución del modelo obtenido, descrito por una ecuación diferencial ordinaria no lineal de segundo orden y considerado como modelo real del sistema, es hallada utilizando el método numérico Runge-Kutta de orden 5. De igual manera, se presenta un modelo aproximado del sistema, descrito por una ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden, obtenido mediante linealización por series de Maclaurin y resuelto algebraicamente. Con los dos modelos matemáticos, real y aproximado, se lleva a cabo un análisis oscilatorio del sistema del péndulo físico para conocer su comportamiento y grado de similitud. Los resultados numéricos se muestran mediante gráficas que ilustran la similitud de los modelos para posiciones angulares muy pequeñas y se observa, además, que el período de oscilación del péndulo no depende de la masa, sino de otras variables que intervienen en el sistema, como la gravedad y la longitud de la cuerda.

Palabras clave: Péndulo físico; péndulo simple; movimiento oscilatorio; isocronismo; modelos matemáticos.

Abstract

In this article, the construction of the mathematical model of the physical pendulum system is presented and its oscillatory behavior is studied. Four variables are considered in the system: angular position, velocity, gravity, and length of the string that supports the mass of the pendulum. The solution of the obtained model, described by a second order nonlinear ordinary differential equation and considered as a real model of the system, is found using the Runge-Kutta numerical method of order 5. Similarly, an approximate model of the system is presented, described by a second-order linear ordinary differential equation, obtained by Maclaurin series linearization and solved algebraically. With the two mathematical models, real and approximate, an oscillatory analysis of the physical pendulum system is carried out to know its behavior and degree of similarity. The numerical results are shown by means of graphs that illustrate the similarity of the models for very small angular positions and it is also observed that the oscillation period of the pendulum does not depend on the mass, but on other variables that intervene in the system, such as the gravity and the length of the rope.

Keywords: Physical pendulum; simple pendulum; oscillatory movement; isochronism; mathematical models.

Resumo

Neste artigo, apresenta-se a construção do modelo matemático do sistema pendular físico e estuda-se seu comportamento oscilatório. Quatro variáveis são consideradas no sistema: posição angular, velocidade, gravidade e comprimento do fio que sustenta a massa do pêndulo. A solução do modelo obtido, descrito por uma equação diferencial ordinária não linear de segunda ordem e considerado como um modelo real do sistema, é encontrada pelo método numérico de Runge-Kutta de ordem 5. Da mesma forma, um modelo aproximado do sistema é apresentado, descrito por uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem, obtida por linearização em série de Maclaurin e resolvida algebricamente. Com os dois modelos matemáticos, real e aproximado, é realizada uma análise oscilatória do sistema pendular físico para conhecer seu comportamento e grau de similaridade. Os resultados numéricos são apresentados por meio de gráficos que ilustram a semelhança dos modelos para posições angulares muito pequenas e observa-se também que o período de oscilação do pêndulo não depende da massa, mas de outras variáveis que intervêm no sistema, como a gravidade e o comprimento da corda.

Palavras-chave: Pêndulo físico; pêndulo simples; movimento oscilatório; isocronismo; modelos matemáticos.

Introducción

Galileo Galilei, un eminente hombre durante la época del Renacimiento y uno de los científicos más importantes de todos los tiempos, basó su vida en el conocimiento y la sabiduría. Su curiosidad y deseo por aprender lo llevaron a realizar incontables experimentos hasta consolidar sus capacidades científicas [11,12]. Nació en la ciudad de Pisa, Italia, en donde su padre, Vicente Galilei, lo incursionó en las áreas de conocimiento científico que él dominaba [8]. A su corta edad, Galileo disfrutaba el construir juguetes ingeniosos en función del movimiento, lo que marcaría el inicio de su descubrimiento más importante [10]. Realizó sus estudios en el área de medicina durante tres años por petición de su padre; sin embargo, las matemáticas y la física siguieron

atrayéndole, decidiendo así abandonar sus estudios y comenzar su camino como el gran genio matemático [3].

Como era costumbre, Galileo Galilei observaba todas las mañanas la Catedral de Pisa. Cierta día, se dirigía a la ubicación de este templo y mientras un sacristán encendía una lámpara que colgaba de una cadena en la cúpula de la iglesia, observó que la lámpara al ser empujada por el sacristán adquiría un movimiento oscilatorio y que sin importar cuál fuese la amplitud de la oscilación, siempre conservaba el mismo desplazamiento. Frente a esto, decidió medir el tiempo de las oscilaciones, tomando como medida las pulsaciones de su muñeca, fue así que comprobó que cada oscilación duraba el mismo número de pulsaciones [7]. Volvió a reproducir este experimento en innumerables ocasiones, formulando de esta manera que el período de oscilación de un péndulo es independiente de su amplitud, dando lugar al “isocronismo”, una palabra que representa este gran hallazgo [16].

Galileo se sirvió del péndulo para estudiar la caída libre de los cuerpos y, de sus componentes, pudo entender la dependencia de la gravedad para su movimiento. Esto constituyó, a su vez, las bases de lo que ahora se conoce como movimiento uniforme, mismo que describe que los espacios recorridos por un móvil en cualquier intervalo de tiempo, serán iguales entre sí [6]. Posteriormente, importantes científicos tal como Isaac Newton, utilizó este principio para medir la constante de gravitación, encontrar la relación entre peso y masa, estudiar las colisiones entre objetos, la velocidad del sonido, entre otros. Además, el estudio del péndulo contribuyó sustancialmente al desarrollo del reloj, el mismo que tuvo gran relevancia en la navegación marítima, mejorando el comercio y el desarrollo tecnológico [15,13].

El péndulo consiste en una masa suspendida mediante una cuerda, varilla u otro dispositivo capaz de mantener un sistema fijo, desde un punto estable o un eje horizontal. En general, este sistema físico se encuentra bajo la influencia de la gravedad, lo que genera un movimiento de la masa dentro del plano vertical, desde un lado hacia el lado contrario, conocido como oscilación, que se produce en determinados intervalos de tiempo. Además, el péndulo tiene propiedades dinámicas muy interesantes y puede considerarse un proceso conservativo cuando la fricción es despreciable [2, 4].

El modelo matemático que rige el comportamiento del péndulo físico está comprendido por una ecuación diferencial no lineal de grado dos, la cual describe la posición de la masa colgante en

cualquier punto del sistema, a su vez, se puede aproximar a un oscilador lineal cuando su amplitud es pequeña [14].

En este artículo se representa gráfica y analíticamente el comportamiento matemático del péndulo físico, usando como recurso principal a las ecuaciones diferenciales que rigen su movimiento y los parámetros intervinientes en ellas. Se logra comparar experimentalmente el funcionamiento de los modelos matemáticos propuestos (aproximado y real) que determinan el comportamiento del péndulo físico, a través, de la utilización de software matemático (MatLab2020b) llegando a la conclusión más relevante que el período de oscilación de un péndulo es independiente de su amplitud y comprobando así el “isocronismo” planteado por Galileo Galilei [16].

El resto del artículo está organizado de la siguiente manera: en la sección 2 se presenta la construcción y linealización del modelo matemático del sistema del péndulo físico; en la sección 3 se presenta los resultados numéricos que describen el comportamiento de los modelos matemáticos propuestos para el sistema (real y aproximado), centrándose en sus principales semejanzas y diferencias al modificar las variables que intervienen; y, finalmente, en la sección 4 se presenta las principales conclusiones de este trabajo.

Modelamiento matemático del péndulo físico

En esta sección, se muestra la construcción del modelo matemático del sistema del péndulo físico. En la Figura 1, se observa la representación gráfica del sistema, mostrándose en la Figura 1a las variables que intervienen y en la Figura 1b el diagrama de cuerpo libre. Con este análisis gráfico, se formula el modelo matemático del sistema.

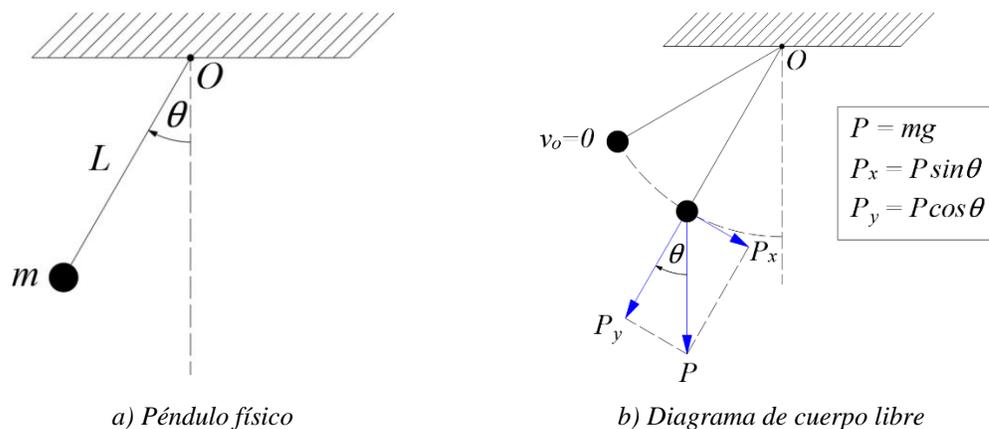


Figura 1. Representación gráfica del sistema del péndulo físico.

El péndulo físico se lo define como una partícula de masa m suspendida de un punto O con una cuerda de longitud L y masa despreciable (Figura 1a). La naturaleza de las oscilaciones descrita por el sistema se rige de una ecuación que describe el movimiento de la partícula [1].

Negando la resistencia del aire con respecto al movimiento del sistema, considerando así, un sistema conservativo [2], y siguiendo la Segunda Ley de Newton para sistemas rotacionales, se obtiene que el producto de la masa con respecto a la aceleración tangencial es igual a la componente tangencial de la gravedad, como se presenta en la ecuación (1)

$$ma_t = -mg \sin \theta, \quad (1)$$

la fuerza tangencial ($mg \sin \theta$) tiene signo negativo, debido a que siempre va en sentido contrario al desplazamiento; al tratarse de un movimiento circular se puede definir a la aceleración tangencial (a_t) también como

$$a_t = L \frac{d^2\theta}{dt^2}, \quad (2)$$

Donde $d^2\theta/dt^2$ es la aceleración angular y L , la longitud de la cuerda de la cual está sujeto el objeto de masa m . Si se reemplaza la ecuación (2) en (1), se obtiene (3), la cual ayuda que se le pueda dar una mejor descripción a la ecuación que rige el movimiento del sistema

$$m \left(L \frac{d^2\theta}{dt^2} \right) = -mg \sin \theta. \quad (3)$$

Reduciendo la ecuación (3), anulando la masa en ambos lados e igualando a cero por la ley de la Conservación de la Energía, se obtiene (4), ecuación que describe la posición del objeto en cualquier punto del sistema del péndulo físico

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0. \quad (4)$$

Acorde se observa en (4), la ecuación diferencial de orden 2 es no lineal, debido a la presencia de la función $\sin \theta$. Para intentar comprender como se comportan las soluciones de ecuaciones

diferenciales no lineales de orden superior (mayor que 1), se trata de simplificar el problema aplicando una sustitución de términos no lineales por aproximaciones [18]; por ejemplo, utilizando aproximaciones por series de Maclaurin para $\sin \theta$, la cual viene dada por

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \quad (5)$$

Entonces, usando la aproximación

$$\sin(\theta) \approx \theta - \frac{\theta^3}{6} \quad (6)$$

Y reemplazando (6) en (4), se obtiene (7)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{g}{L}\right)\theta - \left(\frac{g}{6L}\right)\theta^3 = 0. \quad (7)$$

Se ha demostrado que para ángulos muy pequeños y por la simplificación conveniente de las leyes trigonométricas donde la precisión es aceptable cuando el ángulo tiende a cero, se afirma que $\sin\theta \approx \theta$, donde θ es un ángulo expresado en radianes. Así, el modelo matemático del sistema aproximado se encuentra descrito por (8), conforme se indica

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0. \quad (8)$$

Tomando como referencia la ecuación (8), se define que en ese intervalo el péndulo físico es un movimiento armónico, así se puede hallar su periodo (T), frecuencia (f) y frecuencia angular (w), obteniendo que

$$w = \sqrt{\frac{g}{L}}, \quad (9)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}, \quad (10)$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}}. \quad (11)$$

La ecuación (10) corresponde al periodo cuando la posición angular expresada en radianes es pequeña, por lo que, se puede definir una fórmula de amplitud sin desarrollar explícitamente $\theta(t)$, la cual, no será independiente de la amplitud oscilatoria inicial. Por lo tanto, se generaliza el periodo en el que se pueda utilizar cualquier ángulo

$$T = 4 \sqrt{\frac{L}{2g}} \int_0^{\theta_m} \frac{d\theta}{\sqrt{(\cos\theta - \cos\theta_m)}}. \quad (12)$$

En (8) se presenta la ecuación lineal básica. En la que para resolverla existen tres casos: $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ y $\lambda > 0$; donde λ representa a g/L .

Caso 1: cuando $\lambda = 0$ la solución de $y'' = 0$ es

$$y = c_1x + c_2,$$

Este caso no corresponde, porque la única forma de que $\lambda = 0$ es que la gravedad g sea cero, y esto no es posible debido a que el valor de la gravedad en la superficie terrestre es de $9,81m/s^2$ [17].

Caso 2: Cuando $\lambda < 0$ es conveniente realizar la sustitución $\lambda = -\alpha^2$ en la que α denota un número positivo. Entonces las raíces de la ecuación auxiliar $m^2 - \alpha^2 = 0$, son $m_1 = \alpha$ y $m_2 = -\alpha$. Como el intervalo en el que se trabaja es infinito, la solución general de $y'' - \alpha^2y = 0$ [18] es

$$y = c_1 \cosh \alpha x + c_2 \sinh \alpha x,$$

Este caso es incompatible con el modelo, debido a que el movimiento del péndulo físico está a favor de la fuerza de gravedad, por lo tanto, se obtiene siempre un signo positivo.

Caso 3: Cuando $\lambda > 0$ es conveniente realizar la sustitución $\lambda = \alpha^2$ en la que α denota un número positivo. La ecuación auxiliar resultante es $m^2 + \alpha^2 = 0$, misma que posee raíces complejas $m_1 = i\alpha$ y $m_2 = -i\alpha$. La solución general de $y'' + \alpha^2 y = 0$ [18] es

$$y = c_1 \cos \alpha x + c_2 \sin \alpha x.$$

Al analizar la ecuación (8), g/L se ajusta al caso 3, ya que tanto g como L son positivos, su división dará un número positivo, que lo denotaremos como λ ; por ende $\lambda > 0$. Dando como solución general del modelo

$$y = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t,$$

En la que esta linealización muestra para condiciones iniciales que correspondan a oscilaciones pequeñas, el movimiento del péndulo descrito por (4) es periódico [18].

Resultados numéricos

En esta sección, se realizan las pruebas de validación del modelo matemático aproximado estudiado, tomando en cuenta las variables que intervienen en el sistema (longitud y gravedad) y las condiciones iniciales (posición angular y velocidad). Se plantean dos experimentos, considerando la aceleración de la gravedad constante e igual a 9.8 m/s^2 y que el péndulo parte del reposo $v_0 = 0 \text{ m/s}$: 1) longitud de la cuerda L constante y posición angular inicial θ variable; y, 2) longitud L variable y posición angular inicial θ constante. Para el primer experimento, se fija la longitud de la cuerda en $L = 10 \text{ m}$ y el péndulo parte con diferentes posiciones angulares de $\theta = 0.01, 0.1, 0.5, \pi/2 \text{ rad}$. Para el segundo experimento, se fija la posición angular en $\theta = 0.1 \text{ rad}$ y se varía la longitud de la cuerda, tomando valores de $L = 0.1, 1, 10, 100 \text{ m}$. En ningún caso se varía la posición angular inicial y la longitud de la cuerda al mismo tiempo.

Los experimentos se realizan sobre los dos modelos matemáticos propuestos para el sistema: aproximado y real. Los resultados de las pruebas nos permiten concluir, en forma comparativa, la exactitud o inexactitud del modelo aproximado con respecto al modelo real. El modelo aproximado

se ha planteado considerando la linealización de la función *seno* que aparece en el modelo real del sistema [9].

Las pruebas se llevan a cabo en el paquete MatLab 2020b, utilizando la solución exacta del modelo aproximado (ecuación diferencial lineal de segundo orden) y la solución aproximada del modelo real del sistema (ecuación diferencial no lineal de segundo orden). Para resolver el modelo real del sistema se utiliza el método numérico Runge-Kutta de orden 5 [5].

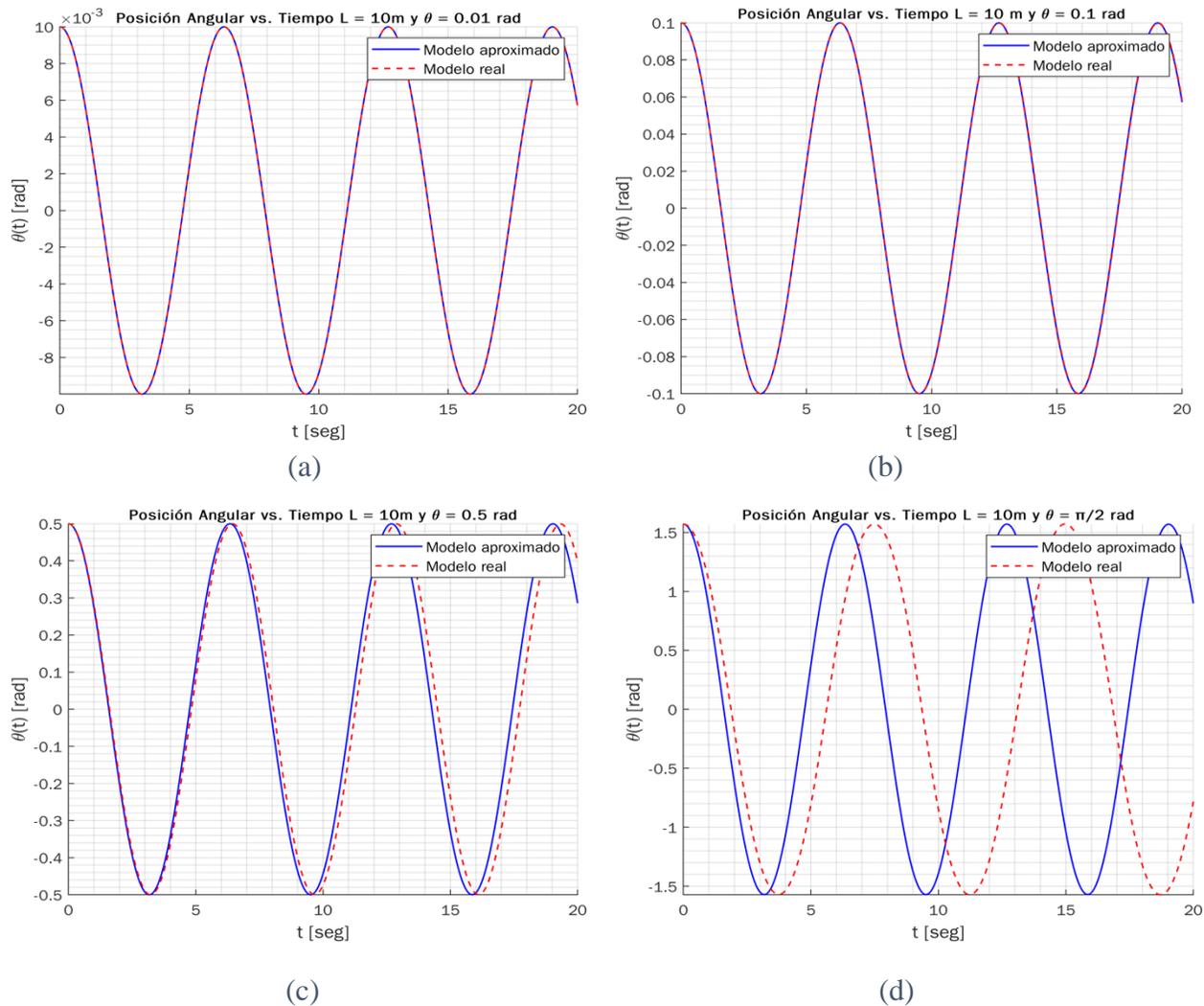


Figura 2. Modelos aproximados y real del sistema con L constante y θ variable.

En el primer experimento, conforme se observa en la Figura 2a y 2b, para $L = 10$ m y $\theta = 0.01$, 0.1 rad, el comportamiento de los dos modelos, aproximado y real, son similares; sin embargo, al

utilizar ángulos mayores a $\theta = 0.1 \text{ rad}$, por ejemplo $\theta = 0.5$ y $\pi/2 \text{ rad}$, se visualiza en las Figuras 2c y 2d un desfase entre los modelos antes mencionados. En este último caso, el desfase es directamente proporcional a la posición angular inicial.

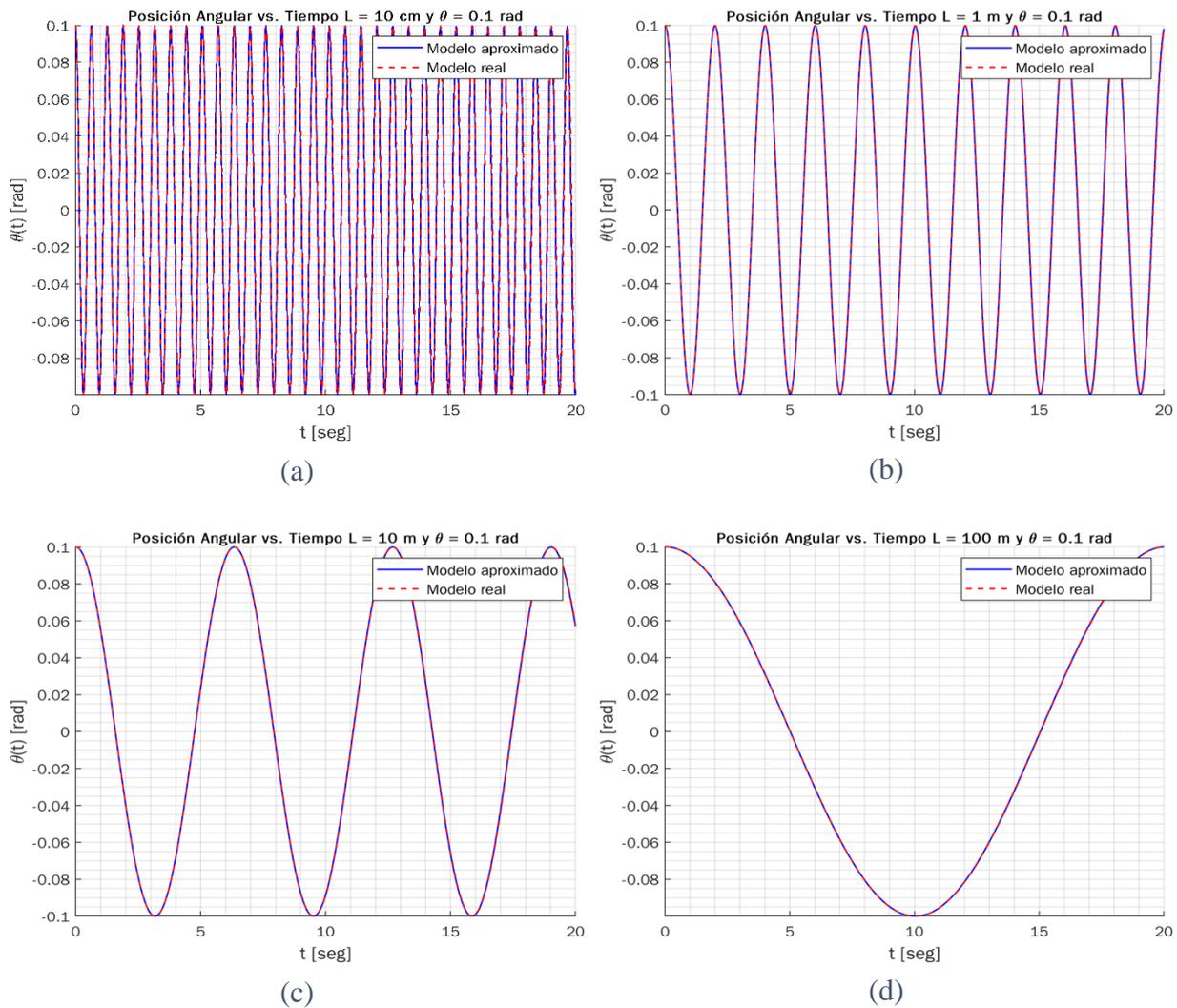


Figura 3. Modelos aproximado y real del sistema con $\theta = 0.1 \text{ rad}$ y L variable.

En el segundo experimento, acorde se visualiza en la Figura 3, para $\theta = 0.1 \text{ rad}$ y $L = 0.1, 1, 10, 100 \text{ m}$, a medida que la longitud de la cuerda del péndulo varía, los modelos matemáticos del sistema, aproximado y real, son similares; es decir, no se visualizan desfases como en las Figuras 2c y 2d del primer experimento. Por otro lado, a medida que aumenta la longitud de la

cuerda L , la frecuencia disminuye y el período crece (ver Figura 3). En este sentido, para la longitud $L = 0.1 \text{ m}$ (Figura 3a), se observa el mayor número de oscilaciones; y, para la longitud $L = 100 \text{ m}$ (Figura 3d), el menor número de oscilaciones.

Por último, se deduce que cuando se toman valores para la posición angular muy pequeños ($0 < \theta \leq 0.1 \text{ rad}$), las gráficas en los modelos matemáticos del sistema, aproximado y real, son similares, validando de esta forma el modelo aproximado propuesto. Por otro lado, cuando se trabaja con valores de la posición angular mayores que 0.1 rad , se observa un desfase progresivo entre las oscilaciones de los dos modelos. En este mismo sentido, al realizar los experimentos para valores de $\theta > 1 \text{ rad}$, el modelo real presenta un comportamiento totalmente distinto al del modelo aproximado, esto es de esperarlo, debido a que la función $\sin\theta$ está acotada entre -1 y 1.

Conclusiones

El análisis de los resultados del modelo aproximado propuesto en este artículo, ha permitido identificar que el periodo no depende de la masa del péndulo, sino de otros factores que intervienen en este sistema como la gravedad y la longitud de la cuerda.

El periodo no se mantiene constante, sino que este varía conforme la longitud cambia, es decir, a menor longitud, menor periodo y mayor frecuencia de oscilación; por el contrario, a mayor longitud de la cuerda, mayor es el periodo y menor la frecuencia. Esto último sucede porque al aumentar la longitud de la cuerda, las oscilaciones disminuyen debido a que la masa del péndulo tarda más tiempo en pasar de un punto a otro.

La longitud del péndulo no influye en el comportamiento dinámico similar que mantienen los dos modelos: real y aproximado. Únicamente existe diferencia en el comportamiento de estos modelos cuando se varía el valor de la posición angular inicial. Si la posición angular inicial toma valores entre 0 y 0.1 rad , el modelo aproximado se comporta como el modelo real; sin embargo, cuando la posición angular inicial toma valores entre 0.1 y 1 rad , se presenta un desfase en las oscilaciones del modelo aproximado, respecto del modelo real. Finalmente, si se consideran valores de la posición angular inicial mayores que 1 rad , el modelo aproximado falla en su totalidad, debido a que la función $\sin\theta$ no puede tomar valores por debajo de -1 ni por encima de 1 , ya que está acotada.

En los experimentos llevados a cabo en este artículo, la posición angular inicial puede tomar únicamente valores entre 0 y $\pi/2 \text{ rad}$ debido a que el sistema considera una cuerda de longitud L para sujetar la masa m del péndulo que parte del reposo con caída libre, siendo obvio descartar valores de la posición angular mayores a $\pi/2 \text{ rad}$, debido a que en estos casos, el sistema no se comporta como un péndulo físico. Razón por la cual, se sabe que la cuerda únicamente será estable, cuando no se supere un ángulo de $\pi/2 \text{ rad}$ con respecto al péndulo físico en su estado inicial de reposo; además, de no considerar valores negativos para la posición angular al realizar los experimentos. Es así que se considera únicamente valores entre 0 hasta 1 rad , y que de esta manera se cumpla que θ sea aproximadamente $\sin(\theta)$, mostrando que si el desfase es mínimo o nulo, el modelo aproximado presentado en este artículo es aceptable y por consiguiente, válido.

Referencias

1. M. Alonso and E. J. Finn. Física /. Addison-Wesley Iberoamericana, Estados Unidos, 1995.
2. A. BEL, W. REARTES, and A. TORRESI. Estudio de los ciclos periódicos en diversos problemas derivados del péndulo.
3. R. J. Blackwell. Galileo Galilei. In The History of Science and Religion in the Western Tradition, pages 123–128. Routledge, 2003.
4. W. D. K. C. Kittel and M. A. Ruderman. Berkeley Physics Course, Volumen 1, Mecanica. Ed Reverté, Barcelona, 1968.
5. R. Fazio. An instance of failure for the matlab explicit ode45 solver. In Proceedings of the World Congress on Engineering, volume 3, 2010.
6. Y. Freedman and S. Zemansky. Física universitaria. Editorial. Prentice Hall. México. Decimosegunda edición, 2009.
7. G. Galilei. Discorsi e dimostrazioni matematiche. Elsevier, 2013.
8. G. Gamow. Biografía de la Física. Salvat, 1960.
9. J. L. A. Guancha. Solución numerica a la ecuación diferencial no lineal que describe las oscilaciones del péndulo simple con python numerical solution to the differential no linear equation, that describes the oscillations of the mathematical pendulum with python. 2012.

10. B. Mario. Galileo cortesano: la práctica de la ciencia en la cultura del absolutismo. Katz Editores, 2008.
11. J. Moreno. Un vistazo a galileo galilei. Lotería, 458:8–20.
12. R. G. Newton. Galileo's pendulum: From the rhythm of time to the making of matter. 2009.
13. J. E. M. Pérez. Obtención del valor de la aceleración de la gravedad en el laboratorio de física. Experiencia comparativa del sensor de un teléfono celular inteligente y el péndulo simple. Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias, 12(2):341–346, 2015.
14. S. pulsa el botón titulado Nuevo. El péndulo simple.
15. J. J. Solaz Portolés and V. Sanjosé López. El papel del péndulo en la construcción del paradigma newtoniano. Enseñanza de las Ciencias, 10(1):095–100, 1992.
16. M. Tomás López, C. Manresa, et al. Galileo galilei: el mensajero de las estrellas. 2009.
17. H. D. Young, R. A. Freedman, and A. Lewis Ford. Física universitaria. Pearson educación, 2009.
18. D. G. Zill, A. E. G. Hernández, and E. F. López. Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado. Number 970-686-487-3. Thomson Learning México, 2002.