Polo del Conocimiento

Pol. Con. (Edición núm. 98) Vol. 9, No 9
Septiembre 2024, pp. 3557-3575
ISSN: 2550 - 682X
DOI: 10.23857/pc.v8i5.5564

Uso de la Teoría APOE para el aprendizaje y comprensión de las matemáticas

Using APOE Theory for Learning and Understanding Mathematics

Usar a Teoria APOE para aprender e compreender matemática

Silvia Elizabeth Escobar Pérez [I]
victor.flores@istcarloscisneros.edu.ec
https://orcid.org/0000-0001-5686-6864

Víctor Manuel Flores Andino [II]
silvia.escobar@istcarloscisneros.edu.ec
https://orcid.org/0009-0007-2449-9300

Juan José Pérez Insuasti [III]
jperez_i@espoch.edu.ec
https://orcid.org/0000-0002-4825-1269

Correspondencia: victor.flores@istcarloscisneros.edu.ec

Ciencias de la Educación
Artículo de Investigación

*** Recibido:** 26 de julio de 2024 ***Aceptado:** 24 de agosto de 2024 *** Publicado:** 28 de septiembre de 2024

I. Licenciada en Ciencias de la Educación. Profesora de Ciencias Exactas. Magister en Aprendizaje de la Física. Docente del Instituto Superior Tecnológico Carlos Cisneros, Carrera de Tecnología Superior en Electrónica, Riobamba, Ecuador.
II. Ingeniero en Electrónica y Control. Docente del Instituto Superior Tecnológico Carlos Cisneros, Carrera de Tecnología Superior en Electrónica, Riobamba, Ecuador.
III. Ingeniero en Electrónica, Telecomunicaciones y Redes. Magister en Sistemas de Telecomunicaciones. Profesional de Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Facultad de Informática y Electrónica, Riobamba, Ecuador.

Resumen

Un marco constructivista para un mejor aprendizaje de las matemáticas, es la teoría APOE. Este estudio revisa su aplicación, efectividad y métodos de evaluación asociados. Se sintetiza la literatura existente en el aprendizaje de las matemáticas avanzadas, identificando tendencias, hallazgos clave y áreas de oportunidad para futuras investigaciones. Para lo cual, se realizó una búsqueda sistemática en plataformas de indexación académica, abarcando un período de 44 años (1980-2024). Se aplicaron parámetros de elegibilidad precisos, considerando artículos revisados por pares, tesis doctorales y libros académicos en inglés y español. Se categorizaron los estudios según áreas matemáticas, niveles educativos y enfoques metodológicos. La revisión reveló la aplicación exitosa de APOE en diversas áreas de matemáticas avanzadas, demostrando su eficacia en muchos de los casos. Se identificaron métodos de evaluación alineados con APOE, incluyendo entrevistas clínicas y tareas específicamente diseñadas. La integración de APOE con otros marcos teóricos, como la Taxonomía de Bloom, mostró potencial para mejorar el diseño instruccional. La teoría APOE es útil en educación matemática y el diseño de instrucción. Aunque enfrenta desafíos en su implementación práctica, ofrece una base sólida para comprender y facilitar el aprendiza-je de matemáticas avanzadas. Se recomienda continuar investigando su aplicación en contextos diversos y su integración con tecnologías educativas emergentes.

Palabras Clave: Teoría APOE; Matemáticas; Taxonomía Bloom; Métodos de Evaluación; Instrumentos de Evaluación.

Abstract

A constructivist framework for improved mathematics learning is the APOE theory. This study reviews its application, effectiveness, and associated assessment methods. The existing literature in advanced mathematics learning is synthesized, identifying trends, key findings, and areas of opportunity for future research. To this end, a systematic search was conducted on academic indexing platforms, spanning a 44-year period (1980-2024). Precise eligibility parameters were applied, considering peer-reviewed articles, doctoral theses, and academic books in English and Spanish. The studies were categorized according to mathematical areas, educational levels, and methodological approaches. The review revealed the successful application of APOE in various areas of advanced mathematics, demonstrating its effectiveness in many of the cases. Assessment methods aligned with APOE were identified, including clinical interviews and specifically designed tasks. The integration of APOE with other theoretical frameworks, such as Bloom's Taxonomy, showed potential to improve instructional design. APOE theory is useful in mathematics education and instructional design. Although it faces challenges in its practical implementation, it offers a solid foundation for understanding and facilitating the learning of advanced mathematics. Further research into its application in diverse contexts and its integration with emerging educational technologies is recommended.

Keywords: APOE theory; Mathematics; Bloom's Taxonomy; Assessment Methods; Assessment Instruments.

Resumo

Uma estrutura construtivista para uma melhor aprendizagem da matemática é a teoria APOE. Este estudo analisa a sua aplicação, eficácia e métodos de avaliação associados. A literatura existente sobre a aprendizagem da matemática avançada é sintetizada, identificando tendências, principais conclusões e áreas de oportunidade para investigação futura. Para tal, foi realizada uma pesquisa sistemática em plataformas de indexação académica, abrangendo um período de 44 anos (1980-2024). Foram aplicados parâmetros de elegibilidade precisos, considerando artigos revistos por pares, teses de doutoramento e livros académicos em inglês e espanhol. Os estudos foram categorizados de acordo com as áreas matemáticas, níveis de escolaridade e abordagens metodológicas. A revisão revelou a aplicação bem sucedida da APOE em diversas áreas da matemática avançada, demonstrando a sua eficácia em muitos casos. Foram identificados métodos de avaliação alinhados com a APOE, incluindo entrevistas clínicas e tarefas especificamente concebidas. A integração da APOE com outros referenciais teóricos, como a Taxonomia de Bloom, mostrou potencial para melhorar o design instrucional. A teoria APOE é útil na educação matemática e no design instrucional. Embora enfrente desafios na sua implementação prática, oferece uma base sólida para compreender e facilitar a aprendizagem da matemática avançada. Recomenda-se continuar a investigar a sua aplicação em diversos contextos e a sua integração com as tecnologias educativas emergentes..

Palavras-chave: Teoria APOE; Matemática; Taxonomia de Bloom; Métodos de Avaliação; Instrumentos de Avaliação.

Introducción

La construcción de estructuras mentales específicas se desarrolla al momento de aprender un nuevo conocimiento. En el campo específico de las matemáticas, APOE explica la evolución del aprendizaje en los estudiantes (Hevardani, 2024). En especial en el ámbito de educación superior (Tatira, 2024).

Propone un enfoque que va más allá de los métodos tradicionales, que ayudan a los estudiantes a internalizar conceptos matemáticos (Tsafe, 2024). Esta teoría, se fundamenta en la epistemología genética de Jean Piaget y su aplicación al pensamiento matemático avanzado (Norton, 2024). Postula que la comprensión matemática se desarrolla a través de cuatro etapas principales:

- **Acción**: En esta etapa inicial, el estudiante puede realizar operaciones paso a paso, pero necesita instrucciones externas explícitas. Se describen las acciones como Procesos de cambio en objetos situados fuera del marco de referencia del sujeto (Asiala et al., 1996, p. 7).
- **Proceso**: A medida que el estudiante interioriza las acciones, desarrolla la capacidad de imaginar y realizar las operaciones mentalmente, sin necesidad de ejecutar cada paso. La introspección de una acción genera una actividad mental, que reproduce sus características operativas (Dubinsky y McDonald, 2001, p. 3).
- **Objeto**: Es una construcción mental que representa una idea o concepto matemático en su totalidad, encapsulada en un objeto. Según Dubinsky (1991, p. 3), la encapsulación es el proceso mediante el cual se construye un objeto a partir de una secuencia de acciones.
- **Esquema**: Los esquemas representan el nivel más alto de organización cognitiva, integrando elementos más básicos. Dubinsky y McDonald (2001, p. 3) definen un esquema como es una estructura cognitiva compleja compuesta por elementos más simples y otros esquemas.

Permite a los estudiantes aplicar conocimientos, resolver problemas y pensar críticamente. Esta comprensión se construye a través de conexiones matemáticas, las cuales son esenciales para el desarrollo de conocimientos secuenciales y acumulativos a lo largo del tiempo (García-García, 2024).

Utiliza la descomposición genética, para diseñar intervenciones educativas apropiadas (Borji et al., Students' geometric understanding of partial derivatives and the locally linear approach., 2024). Y la abstracción reflexiva, como mecanismo cognitivo para un aprendizaje activo y flexible (Tallman y O'Bryan, 2024). Donde cada individuo se mueve libremente entre los distintos niveles del

Pol. Con. (Edición núm. 98) Vol. 9, No 9, Septiembre 2024, pp. 3557-3575, ISSN: 2550 - 682X

modelo, adaptándose a las circunstancias propias de cada secuencia de aprendizaje (Antonini y Nannini, 2024).

Esta perspectiva, facilita el estudio de los procesos cognitivos subyacentes al aprendizaje, permitiendo así, la creación de materiales didácticos que promuevan la construcción de conocimientos matemáticos (Dubinsky y McDonald, 2001, p. 275),

I. Metodología

La metodología para este artículo de revisión bibliográfica comprende una serie de pasos sistemáticos y rigurosos.

En una primera instancia, se desarrolló una búsqueda exhaustiva en plataformas de indexación académica de alto impacto, utilizando descriptores temáticos específicos vinculados a la Teoría APOE y la adquisición de conocimientos matemáticos, en un rango temporal de 44 años (1980-2024).

Se aplicaron parámetros de elegibilidad precisos, considerando artículos revisados por pares, tesis doctorales y libros académicos en inglés y español. La calidad de los estudios seleccionados será evaluada mediante una rúbrica desarrollada para tal fin, con una revisión por pares para garantizar la objetividad.

Se procede a la extracción y síntesis de datos utilizando una matriz de revisión, categorizando los estudios según áreas matemáticas, niveles educativos y enfoques metodológicos. El análisis temático identifica patrones y temas recurrentes en la aplicación de la Teoría APOE, analizando su evolución e impacto en diferentes contextos educativos.

II. Resultados

A. Aplicaciones en matemáticas avanzadas

El ámbito de aplicación de la teoría APOE abarca una amplia variedad de dominios, desde el álgebra abstracta hasta el análisis matemático, proporcionando valiosos aportes sobre los mecanismos cognitivos involucrados en la construcción de conocimientos matemáticos complejos.

En el campo del álgebra abstracta, Dubinsky et al. (1994, p. 268) aplicaron la teoría APOE al estudio de los grupos abstractos. Su investigación reveló que, la comprensión de los estudiantes se ve limitada por su tendencia a interpretar los elementos de un grupo como procesos dinámicos, en lugar de reconocer su naturaleza abstracta como entidades sobre las que se definen operaciones. Esta observación llevó al desarrollo de estrategias pedagógicas específicas para ayudar a los estudiantes a encapsular su comprensión de los elementos del grupo como objetos matemáticos.

Pol. Con. (Edición núm. 98) Vol. 9, No 9, Septiembre 2024, pp. 3557-3575, ISSN: 2550 - 682X

En el ámbito del análisis matemático, la teoría APOE ha demostrado ser una herramienta valiosa para investigar los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje de conceptos matemáticos relacionados con el límite (Cottrill et al., 1996, p. 171), al destacar la importancia de las funciones y su dominio. Donde las funciones, se identifican como entidades matemáticas manipulables. Esta perspectiva ha propiciado el diseño de actividades pedagógicas orientadas a facilitar en los estudiantes la encapsulación de las funciones como objetos matemáticos (Asiala et al., 1997, p. 32).

En este sentido Brown et al. (2010, p. 132), replantea la manera adecuada de desarrollar la estrategia didáctica para el entendimiento de conceptos abstractos como el infinito en los cursos de matemáticas avanzadas.

En su estudio Weller et al. (2003, p. 199), aplicaron la teoría APOE al estudio de los espacios vectoriales. Su investigación reveló que, la edificación de un espacio vectorial demanda la integración de nociones tan diversas como la de conjunto, función y operación binaria, dando lugar a una estructura matemática compleja.

La teoría APOE para explorar la comprensión de la simetría diedra. Zazkis y Dubinsky (1996, p. 437), descubrieron que, la capacidad de los estudiantes para integrar mentalmente las operaciones de rotación y reflexión es un prerrequisito indispensable para la construcción de una concepción sólida de grupo diedro.

Se aplica la teoría APOE para analizar la comprensión estudiantil de la optimización de funciones de dos variables, usando una descomposición genética (GD). Entrevistas revelaron que enfocarse en la estructura topológica del dominio y usar GD mejora la comprensión. Teóricamente, el estudio amplía el uso del Esquema en APOE (Martínez-Planell et al., 2024).

En su estudio Trigueros et al (2024, p. 3), señala que, el uso de esquemas, se divide en: Intra (estructuras aisladas, relaciones de correspondencia), Inter (agrupación y descripción de cambios, relaciones de transformación) y Trans (relaciones entre todas las estructuras, relaciones de conservación y coherencia del esquema).

Se utiliza un modelo de descomposición genética para entender cómo los estudiantes construyen esta relación, diseñando tareas para ayudarlos en este proceso. Se realizaron entrevistas con once estudiantes que completaron las tareas, comparando los resultados con los de un curso basado en conferencias. Los resultados mostraron que las tareas colaborativas basadas en la descomposición

Pol. Con. (Edición núm. 98) Vol. 9, No 9, Septiembre 2024, pp. 3557-3575, ISSN: 2550 - 682X

genética ayudaron a los estudiantes a construir las estructuras propuestas, lo que sugiere que es un modelo efectivo para guiar la instrucción (Borji et al., 2024).

B. Efectividad de la aplicación de la teoría APOE

Esta teoría establece un proceso sólido en la educación matemática, respaldado por numerosos estudios empíricos. Investigaciones como las de Asiala et al. (1996, p. 21) y Trigueros y Oktaç (2019, pág. 317) han evidenciado su eficacia en la comprensión de diversos conceptos matemáticos.

Aunque ha recibido críticas, como las de Tall (1999, p. 115) sobre la subestimación del papel de las representaciones visuales, la mayoría de los estudios, incluido el meta-análisis de Arnon et al. (2014, p. 95), respaldan su utilidad.

Sin embargo, se reconoce la necesidad de más investigación empírica para fortalecer sus fundamentos y optimizar su aplicación en las aulas.

C. Relación de la Taxonomía de Bloom con la teoría APOE

A pesar de sus raíces teóricas distintas, tanto la Taxonomía de Bloom como la teoría APOE convergen en un punto común: ambas ofrecen un marco conceptual para analizar cómo los estudiantes adquieren una comprensión más sólida y elaborada de los conceptos matemáticos (How et al., 2024).

Se describen seis niveles jerarquizados de pensamiento: desde la simple recuperación de información (recordar) hasta la creación de nuevos conocimientos (crear). Los niveles intermedios incluyen la comprensión de conceptos (comprender), la aplicación de conocimientos (aplicar), el análisis de información (analizar), y la evaluación de ideas (evaluar) (Anderson y Krathwohl, 2001). Lo cual permite elaborar actividades que estimulan un nivel de pensamiento más profundo y complejo, trascendiendo la mera memorización y la aplicación mecánica de algoritmos (Krathwohl, 2002, p. 215). Thompson (2008, p. 96) demostró que, diseñar lecciones de matemáticas con base en la Taxonomía de Bloom resulta en una instrucción más equilibrada, ya que considera todos los niveles de pensamiento.

Aunque la teoría APOE y la Taxonomía de Bloom surgieron de contextos teóricos distintos, existen interesantes puntos en común entre ambos modelos (Dubinsky y McDonald, 2001, p. 276). Se puede explorar estas relaciones de la siguiente manera:

- **Acción (APOE) y Recordar/Aplicar (Bloom)**: En la etapa de Acción de APOE, los estudiantes pueden realizar operaciones paso a paso, lo que se asemeja a los niveles de Recordar y Aplicar en la Taxonomía de Bloom. En ambos casos, los estudiantes están trabajando con procedimientos concretos y específicos.

- **Proceso (APOE) y Comprender (Bloom):** La etapa de Proceso en APOE, donde los estudiantes pueden imaginar una transformación sin necesidad de realizar cada paso, se alinea con el nivel de Comprensión en la Taxonomía de Bloom. En ambos casos, los estudiantes han internalizado el concepto y pueden trabajar con él mentalmente.
- **Objeto (APOE) y Analizar/Evaluar (Bloom):** La etapa Objeto, se alinea con los criterios de Análisis y Evaluación. En ambos casos, los estudiantes demuestran la habilidad de trabajar con ideas más complejas, modificándolas y evaluándolas.
- **Esquema (APOE) y Crear (Bloom):** El nivel de Esquema en APOE, caracterizado por la creación de una red coherente de conceptos, se alinea con el nivel más elevado de la Taxonomía de Bloom: Crear. En ambos casos, los estudiantes operan en un nivel de abstracción y complejidad cognitiva superior.

En su estudio, Arnon et al. (2014, p. 156) sugieren que, al integrar la Taxonomía de Bloom y la teoría APOE, es posible diseñar experiencias de aprendizaje en matemáticas más sólidas y completas. Esta integración permite a los educadores considerar tanto los niveles de complejidad cognitiva (Bloom), como las estructuras mentales específicas involucradas en el aprendizaje de conceptos matemáticos (APOE). Al combinarlas, se obtiene se visualiza como realmente los estudiantes aprenden, lo que permite diseñar intervenciones pedagógicas más adecuadas (Trigueros y Martínez-Planell, 2010, p. 365).

D. Métodos de evaluación alineados con la teoría APOE

La evaluación es un aspecto importante en el ámbito académico. El modelo APOE describe la construcción del conocimiento, así como para analizar la enseñanza y diseñar evaluaciones (Dubinsky y McDonald, 2001, p. 275).

Las evaluaciones alineadas con APOE son parte integral de un proceso de investigación que busca determinar el grado en que los estudiantes formar su desarrollo cognitivo de aprendizaje, desde una evaluación del contenido teórico hasta la implementación de actividades de enseñanza (Asiala et al., 1996).

La entrevista clínica es la más utilizada, su objetivo principal es desvelar los procesos cognitivos subyacentes al pensamiento matemático de los estudiantes. Estas entrevistas generalmente implican pedir a los estudiantes que resuelvan problemas mientras explican su razonamiento en

Pol. Con. (Edición núm. 98) Vol. 9, No 9, Septiembre 2024, pp. 3557-3575, ISSN: 2550 - 682X

voz alta, permitiendo al evaluador inferir las estructuras mentales que el estudiante está utilizando (Arnon et al., 2014, p. 94).

Otro método de evaluación alineado con APOE es el uso de tareas específicamente diseñadas para revelar las construcciones mentales de los estudiantes. Clark et al. (1997) diseñaron tareas que van desde problemas que requieren acciones simples hasta aquellos que demandan la manipulación de funciones como objetos.

Una de las herramientas de evaluación en el contexto de APOE, son los mapas mentales. Williams (1998) argumenta que, pueden revelar la estructura del esquema de un estudiante, mostrando cómo se conectan diferentes conceptos y procesos en su mente.

Además, se han desarrollado instrumentos de evaluación estandarizados basados en APOE para conceptos específicos. Por ejemplo, Weller et al. (2003) desarrollaron el Calculus Concept Inventory, que utiliza preguntas de opción múltiple diseñadas para evaluar la comprensión conceptual del cálculo en términos de las etapas de APOE.

Los educadores desempeñan un rol activo en la adaptación de la enseñanza gracias a la evaluación formativa, facilitando así la transición de los estudiantes entre las diferentes etapas de comprensión (Tzur et al., 2001).

Sin embargo, la implementación de métodos de evaluación alineados con APOE no está exenta de desafíos:

1. **Complejidad**: Evaluar las construcciones mentales de los estudiantes requiere una comprensión profunda tanto del contenido matemático como de la teoría APOE.
2. **Tiempo**: Métodos como las entrevistas clínicas y el análisis de mapas conceptuales pueden ser intensivos en tiempo.
3. **Interpretación**: Deducir los constructos mentales subyacentes al desempeño de los estudiantes en tareas puede resultar subjetivo y demandar una amplia experiencia por parte del evaluador.
4. **Escalabilidad**: Algunos métodos, como las entrevistas individuales, pueden ser difíciles de implementar en clases grandes.
5. **Validez**: Asegurar que las evaluaciones realmente reflejen las construcciones mentales de los estudiantes según lo postulado por APOE puede ser un desafío.

Los métodos de evaluación alineados con la teoría APOE ofrecen una perspectiva valiosa, ya que van más allá de la simple evaluación del desempeño, buscando revelar las estructuras mentales

Pol. Con. (Edición núm. 98) Vol. 9, No 9, Septiembre 2024, pp. 3557-3575, ISSN: 2550 - 682X

subyacentes que los estudiantes utilizan al pensar sobre conceptos matemáticos. Aunque su implementación puede ser desafiante, estos métodos proporcionan información concreta respecto al proceso de asimilación del contenido teórico como pedagógico. A medida que la teoría APOE continúa evolucionando, es probable que veamos el desarrollo de nuevos y más refinados métodos de evaluación que nos permitan comprender mejor cómo los estudiantes aprenden matemáticas avanzadas.

E. Instrumentos de medición del progreso cognitivo

La medición del progreso cognitivo en matemáticas avanzadas es un área de investigación crucial. El desarrollo cognitivo en matemáticas trasciende la mera acumulación de datos, demandando una transformación cualitativa en los procesos de razonamiento matemático. Por consiguiente, los instrumentos de evaluación deben ser capaces de detectar no solo el incremento en el conocimiento, sino también las mutaciones en las estructuras cognitivas subyacentes (Tall, 2013, p. 15).

Los mapas de progreso del aprendizaje describen las rutas individuales que suelen seguir los estudiantes al adquirir nuevos conocimientos y destrezas. Estos mapas proporcionan una estructura para evaluar el progreso de los estudiantes a lo largo de un continuo de comprensión cada vez más sofisticada (Duschl et al., 2011, p. 123).

En el contexto de las matemáticas avanzadas, Simon (1995) Propuso el concepto de trayectoria de aprendizaje hipotética, que esboza el camino previsto que siguen los estudiantes en el desarrollo de su razonamiento matemático. Los instrumentos basados en este concepto evalúan el progreso de los estudiantes en relación con estas trayectorias hipotéticas.

Las evaluaciones diagnósticas cognitivas constituyen otra vía relevante. Según Leighton y Gierl (2007, p. 3), estas evaluaciones utilizan modelos psicométricos avanzados, como los modelos de diagnóstico cognitivo (CDM), que permite deducir las habilidades cognitivas específicas que poseen. De esta manera, se obtiene una visión más detallada de los conocimientos y procesos mentales de los estudiantes.

Los Inventarios Conceptuales son herramientas ampliamente utilizadas para evaluar el progreso cognitivo en matemáticas avanzadas. Siguiendo el ejemplo del Inventario de Conceptos de Fuerza de Hestenes et al. (1992), se han creado instrumentos similares para evaluar la comprensión conceptual en diferentes temas matemáticos. Por ejemplo, el Inventario Conceptual de Cálculo, permite medir la solidez de las ideas de los estudiantes sobre los conceptos fundamentales del cálculo (Epstein, 2013).

Pol. Con. (Edición núm. 98) Vol. 9, No 9, Septiembre 2024, pp. 3557-3575, ISSN: 2550 - 682X

Se proporciona un marco para medir habilidades latentes para analizar las respuestas de un test (De Ayala, 2009, p. 2). Estos instrumentos permiten una medición más precisa del nivel de habilidad de los estudiantes y pueden rastrear el crecimiento a lo largo del tiempo.

Además, se han desarrollado instrumentos específicos para evaluar aspectos particulares del pensamiento matemático avanzado:

1. **Pruebas de razonamiento algebraico:** Kaput (2008) desarrolló instrumentos para evaluar el desarrollo del pensamiento algebraico, desde el razonamiento aritmético hasta el algebraico abstracto.
2. **Evaluaciones de pensamiento geométrico:** Los niveles de Van Hiele proporcionan un marco para evaluar el progreso en el pensamiento geométrico, y se han desarrollado varios instrumentos basados en este modelo (Usiskin, 1982).
3. **Pruebas de razonamiento estadístico:** Garfield (2003) desarrolló el Statistical Reasoning Assessment para evaluar el progreso en la comprensión de conceptos estadísticos avanzados.
4. **Evaluaciones de pensamiento matemático creativo:** Leikin (2009) propuso instrumentos para medir la fluidez, flexibilidad y originalidad en la resolución de problemas matemáticos.

La tecnología posibilita la creación de una amplia gama de herramientas para evaluar el progreso cognitivo:

1. **Evaluaciones adaptativas por computadora:** as evaluaciones adaptativas computarizadas proporcionan una medida más exacta de las habilidades de los estudiantes al ajustar la dificultad de las preguntas en función de su desempeño (Wainer et al., 2000).
2. **Análisis de protocolos de pensamiento en voz alta:** Software especializado puede analizar las explicaciones verbales de los estudiantes mientras resuelven problemas, proporcionando insights sobre sus procesos cognitivos (Ericsson y Simon, 1993).
3. **Análisis de trazas de aprendizaje:** Los sistemas de tutoría inteligente pueden recopilar datos detallados sobre las interacciones de los estudiantes, permitiendo un análisis fino del progreso cognitivo (Koedinger et al., 2013).

Sin embargo, el desarrollo y uso de estos instrumentos enfrenta varios desafíos:

1. **Validez**: Asegurar que los instrumentos realmente midan el constructo cognitivo deseado es un desafío continuo (Messick, 1995).

Pol. Con. (Edición núm. 98) Vol. 9, No 9, Septiembre 2024, pp. 3557-3575, ISSN: 2550 - 682X

2. **Confiabilidad**: La consistencia de las mediciones a lo largo del tiempo y en diferentes contextos es crucial (Nunnally y Bernstein, 1994).
3. **Sensibilidad**: Los instrumentos deben ser capaces de detectar cambios sutiles en el pensamiento matemático (Wiliam, 2010).
4. **Equidad**: Los instrumentos deben ser justos y no sesgados contra grupos particulares de estudiantes (Camilli, 2006).
5. **Interpretación**: Traducir los resultados de estos instrumentos en información accionable para los educadores puede ser complejo (Pellegrino et al., 2001).

En conclusión, los instrumentos de medición del progreso cognitivo en matemáticas avanzadas han evolucionado significativamente, incorporando avances en psicometría, ciencia cognitiva y tecnología educativa. Sin embargo, el diseño y uso efectivo de estos instrumentos requiere una cuidadosa consideración de cuestiones de validez, confiabilidad y equidad. A medida que nuestra comprensión del pensamiento matemático avanzado continúa evolucionando, es probable que veamos el desarrollo de instrumentos aún más sofisticados y precisos para medir el progreso cognitivo en este campo crucial.

III. Discusión

La revisión de la literatura revela su significativo impacto en la comprensión y enseñanza de las matemáticas avanzadas. Esta teoría proporciona un marco sólido para analizar cómo los estudiantes construyen su conocimiento matemático, ofreciendo insights valiosos para investigadores y educadores.

APOE ha mostrado ser una herramienta versátil en diversas áreas de las matemáticas avanzadas. Los estudios revisados indican los beneficios del desarrollo de estrategias pedagógicas más efectivas, diseñadas para facilitar la progresión de los estudiantes a través de las etapas.

La efectividad de la teoría APOE ha sido respaldada por numerosas investigaciones, aunque también se han identificado algunas limitaciones. Los estudios que comparan la instrucción basada en APOE con métodos tradicionales generalmente reportan resultados positivos. No obstante, la diversidad en la magnitud de estos efectos indica que la efectividad de APOE puede fluctuar según el contexto particular y el concepto matemático en estudio.

La combinación de estrategias metodológicas de enseñanza, ofrece perspectivas prometedoras para el diseño de instrucción y evaluación en matemáticas. Esta integración permite una consideración

Pol. Con. (Edición núm. 98) Vol. 9, No 9, Septiembre 2024, pp. 3557-3575, ISSN: 2550 - 682X

más completa de los niveles de complejidad cognitiva y las estructuras mentales específicas involucradas en el aprendizaje matemático.

Los métodos de evaluación alineados con APOE, como las entrevistas clínicas y las tareas diseñadas específicamente, proporcionan información rica sobre las construcciones mentales de los estudiantes. Sin embargo, estos métodos también presentan desafíos en términos de tiempo, interpretación y escalabilidad, especialmente en entornos educativos grandes.

El desarrollo de una variedad de instrumentos de evaluación basados en APOE, desde mapas de progreso hasta evaluaciones adaptativas por computadora, representa un avance significativo en la cuantificación y calificación del desarrollo cognitivo en matemáticas.

Para futuras investigaciones, se recomienda:

- Explorar más a fondo las teorías expuestas en contextos interdisciplinarios.
- Investigar cómo la teoría APOE puede integrarse con tecnologías educativas emergentes.
- Desarrollar herramientas de evaluación prácticas y sólidas, basadas en APOE, para su implementación en distintos entornos educativos.
- Examinar la efectividad de APOE en diferentes entornos educativos y culturales.

En última instancia, la teoría APOE continúa evolucionando y contribuyendo significativamente a nuestra comprensión de cómo los estudiantes aprenden matemáticas avanzadas, proporcionando una base sólida para mejorar la educación matemática en todos los niveles.

IV. Conclusiones

El modelo APOE se ha convertido en una herramienta fundamental para diseñar estrategias de enseñanza efectivas, donde se evidencia su significativo impacto en la investigación educativa y en la práctica pedagógica.

La teoría APOE ha demostrado su versatilidad al aplicarse a una amplia gama de áreas matemáticas, facilitando el análisis y la mejora de la comprensión conceptual. Su enfoque en las estructuras mentales de los estudiantes la convierte en una base teórica sólida para la innovación en la enseñanza.

Los estudios revisados muestran generalmente resultados positivos en la comprensión conceptual de los estudiantes cuando se implementan intervenciones basadas en APOE. Sin embargo, la variabilidad en la magnitud de estos efectos sugiere la necesidad de considerar cuidadosamente el contexto y el concepto específico en su aplicación.

La integración de APOE con otros marcos teóricos, como la Taxonomía de Bloom, ofrece perspectivas prometedoras para un diseño más completo de la instrucción y evaluación en matemáticas, considerando tanto la complejidad cognitiva como las estructuras mentales específicas.

Los métodos de evaluación alineados con APOE, aunque ricos en información, presentan desafíos en su implementación práctica, especialmente en entornos educativos grandes. Esto subraya la necesidad de desarrollar herramientas de evaluación más eficientes y escalables.

El desarrollo de instrumentos de medición del progreso cognitivo basados en APOE representa un avance significativo, ofreciendo nuevas formas de cuantificar y cualificar la evaluación de los aprendizajes.

A pesar de su utilidad comprobada, APOE, como cualquier teoría, tiene limitaciones y áreas que requieren mayor investigación. Se necesita más trabajo para comprender su aplicabilidad en contextos diversos y su integración con tecnologías educativas emergentes.

En síntesis, la teoría APOE ha demostrado ser una herramienta valiosa. Su enfoque proporciona una base sólida para comprender y facilitar el aprendizaje de matemáticas avanzadas. Sin embargo, es crucial continuar investigando y refinando su aplicación para maximizar su potencial cognitivo en los estudiantes.

La evolución continua de APOE y su adaptación a nuevos desafíos en la educación matemática prometen seguir contribuyendo significativamente a mejorar la labor del docente en las aulas.

Referencias

Anderson, L. W., y Krathwohl, D. R. (2001). A taxonomy for learning, teaching, and assessing: A revision of Bloom's taxonomy of educational objectives: complete edition. Pearson.

Antonini, S., y Nannini, B. (2024). Chains of inferences in proof by induction: a cognitive analysis. En A. Piccolomini d'Aragona, Perspectives on Deduction: Contemporary Studies in the Philosophy, History and Formal Theories of Deduction (pp. 373-395). Springer, Cham International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-031-51406-7_17

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., y Weller, K. (2014). APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education. New York: Springer Science+Business Media. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., y Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. Mathematics Education (CBMS), 2(s.n.), 1-32. https://www.researchgate.net/profile/Mark-Asiala/publication/2784058_A_Framework_for_Research_and_Curriculum_Development_in_Undergraduate_Mathematics_Education/links/54ca6e4c0cf2517b755e08e5/A-Framework-for-Research-and-Curriculum-Development-in-Undergrad

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., y Schwingendorf, K. E. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. The Journal of Mathematical Behavior, 16(4), 399-431. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(97)90015-8

Borji, V., Martínez-Planell, R., y Trigueros, M. (1 de 2024). Students’ geometric understanding of partial derivatives and the locally linear approach. Educational Studies in Mathematics, 115(1), 69-91. https://doi.org/10.1007/s10649-023-10242-z

Borji, V., Martínez-Planell, R., y Trigueros, M. (8 de 2024). Students’ Understanding of Riemann Sums and Double Integrals: The Case of Task Design in APOS Theory. International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 10(1), 1-29. https://doi.org/doi.org/10.1007/s40753-024-00250-6

Brown, A., McDonald, M., y Weller, K. (2010). Step by step: Infinite iterative processes and actual infinity. En F. Hitt, D. A. Holton, y P. W. Thompson, Research in Collegiate Mathematics Education VII (Vol. 16, pp. 115-141). CBMS Issues in Mathematics Education. https://books.google.com.ec/books?id=DCqNAwAAQBAJ&printsec=frontcover&hl=es#v=onepage&q&f=false

Camilli, G. (2006). est fairness. Educational measurement. En R. L. Brennan, Educational Measurement (Ace Praeger Series on Higher Education) Fourth Edición (pp. 221-256). Rowman & Littlefield Publishers.

Clark, J. M., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D. J., John, D. S., . . . Vidakovic, D. (1997). Constructing a schema: The case of the chain rule?. The Journal of Mathematical Behavior, 16(4), 345-364. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(97)90012-2

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., y Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. Journal of mathematical behavior, 15(2), 167-192.

https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=2365c8d466082f1f81fa7ab3baaa5a333fea92c9

De Ayala, R. J. (2009). The theory and practice of item response theory. Guilford Publications.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall, Advanced mathematical thinking (pp. 95-126). Dordrecht: Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1

Dubinsky, E., Dautermann, J., Leron, U., y Zazkis, R. (10 de 1994). On learning fundamental concepts of group theory. Educational studies in Mathematics, 27(3), 267-305. https://doi.org/10.1007/BF01273732

Dubinsky, E., y McDonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. En D. Holton, M. Artigue, U. Kirchgräber, J. Hillel, M. Niss, y A. Schoenfeld, The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study (pp. 275-282). Dordrecht: Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/0-306-47231-7

Duschl, R., Maeng, S., y Sezen, A. (9 de 2011). Learning progressions and teaching sequences: A review and analysis. Studies in Science Education, 47(2), 123-182. https://doi.org/10.1080/03057267.2011.604476

Epstein, J. (9 de 2013). The calculus concept inventory-measurement of the effect of teaching methodology in mathematics. Notices of the American Mathematical Society, 60(8), 1018-1027. https://www.ams.org/notices/201308/rnoti-p1018.pdf

Ericsson, K. A., y Simon, H. A. (1993). Protocol analysis (revised edition). Overview of methodology of protocol analysis. The MIT Press.

García-García, J. (8 de 2024). Mathematical Understanding Based on the Mathematical Connections Made by Mexican High School Students Regarding Linear Equations and Functions. The Mathematics Enthusiast, 21(3), 673-718. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1646

Garfield, J. B. (5 de 2003). Assessing statistical reasoning. Statistics Education Research Journal, 2(1), 22-38. https://doi.org/10.52041/serj.v2i1.557

Hestenes, D., Wells, M., y Swackhamer, G. (1992). Force concept inventory. The physics teacher, 30(3), 141-158.

https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=462eb5d25a5eb3c18e22ee486019b2153b1f0785

Hevardani, K. A. (1 de 2024). Analysis of students' mental construction in understanding the concept of partial derivatives based on action-process-object-schema theory. Nature, 18(4), 735-749. https://doi.org/10.31331/medivesveteran.v8i1.2576.

How, R. P., Zulnaidi, H., y Rahim, S. S. (3 de 2024). Development and Validation of a Teaching Module based on the Traditional Approach of the Japanese Bansho Plan Towards the Mastery of Quadratic Equations. International Journal of Information and Education Technology, 14(3), 411-425. https://doi.org/10.18178/ijiet.2024.14.3.2062

Kaput, J. J. (2008). What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher, y M. L. Blanton, Algebra in the Early Grades (p. 14). Taylor&Francis. https://doi.org/10.4324/9781315097435

Koedinger, K. R., Brunskill, E., Baker, R. S., McLaughlin, E. A., y Stamper, J. (9 de 2013). New potentials for data-driven intelligent tutoring system development and optimization. AI Magazine, 34(3), 27-41. https://doi.org/10.1609/aimag.v34i3.2484

Krathwohl, D. R. (2002). A revision of Bloom's taxonomy: An overview. Theory Into Practice, 41(4), 212-218. https://doi.org/10.1207/s15430421tip4104_2

Leighton, J., y Gierl, M. (. (2007). Cognitive diagnostic assessment for education: Theory and applications. Cognitive diagnostic assessment for education: Theory and applications.

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. En R. Leikin, A. Berman, y B. Koichu, Creativity in mathematics and the education of gifted students (pp. 129-145). Brill. https://doi.org/10.1163/9789087909352_010

Martínez-Planell, R., Trigueros, M., y Borji, V. (3 de 2024). The role of topology in the construction of students' optimization schema for two-variable functions. The Journal of Mathematical Behavior,, 73(s.n.), 101106. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2023.101106

Messick, S. (1995). Validity of psychological assessment: Validation of inferences from persons' responses and performances as scientific inquiry into score meaning. American psychologist, 50(9), 741-749. https://doi.org/10.1037/0003-066X.50.9.741

Norton, A. (2024). Genetic Epistemology as a Complex and Unified Theory of Knowing. En P. C. Dawkins, A. J. Hackenberg, y A. Norton, Piaget's Genetic Epistemology for Mathematics

Education Research (pp. 447-473). Springer Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-47386-9

Nunnally, J. C., y Bernstein, I. H. (1994). Psychometric theory (3rd ed.). New York: McGraw-Hill.

Pellegrino, J. W., Chudowsky, N., y Glaser, R. (2001). Knowing What Students Know: The Science and Design of Educational Assessment. National Academy of Sciences.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. Journal for research in mathematics education, 26(2), 114-145. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.26.2.0114

Tall, D. (1999). Reflections on APOS theory in elementary and advanced mathematical thinking. En O. Zaslaysky, In Proceedings of the 23 rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 148-155). Haifa, Israel: Department of Education in Technology and Science. Technion - Israel Institute of Technology.

Tall, D. (2013). How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics. Cambridge University Press.

Tallman, M. A., y O'Bryan, A. E. (2024). Reflected Abstraction. En P. Dawkins, A. Hackenberg, y A. Norton, Piaget's Genetic Epistemology for Mathematics Education Research (pp. 239-288). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-47386-9_8

Tatira, B. (1 de 2024). First-Year Undergraduate Students' Ways of Thinking in Combinatorics. ournal of Medives: Journal of Mathematics Education IKIP Veteran Semarang, 8(1), 103-121. https://doi.org/10.31331/medivesveteran.v8i1.2576

Thompson, T. (8 de 2008). Mathematics teachers' interpretation of higher-order thinking in Bloom's taxonomy. International electronic journal of mathematics education, 3(2), 96-109. https://doi.org/10.29333/iejme/221

Trigueros, M., Badillo, E., Sánchez-Matamoros, G., y Hernández-Rebollar, L. (7 de 2024). Contributions to the characterization of the Schema using APOS theory: Graphing with derivative. ZDM–Mathematics Education, 56(3), 1-16. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s11858-024-01615-6

Trigueros, M., y Martínez-Planell, R. (1 de 2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. Educational studies in mathematics, 73(s.n.), 3-19. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9201-5

Trigueros, M., y Oktaç, A. (5 de 2019). Task design in APOS Theory. Avances de Investigación en Educación Matemática, 15(s.n), 43-55. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i15.256

Tsafe, A. K. (2 de 2024). Effective mathematics learning through APOS theory by dint of cognitive abilities. Journal of Mathematics and Science Teacher, 4(2), 1-8. https://doi.org/10.29333/mathsciteacher/14308

Tzur, R., Simon, M. A., Heinz, K., y Kinzel, M. (10 de 2001). An account of a teacher's perspective on learning and teaching mathematics: Implications for teacher development. Journal of Mathematics Teacher Education, 4(s.n.), 227-254. https://doi.org/10.1023/A:1011493204582

Usiskin, Z. (1982). Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry. CDASSG Project. https://eric.ed.gov/?id=ed220288

Wainer, H., Dorans, N. J., Flaugher, R., Green, B. F., y Mislevy, R. J. (2000). Computerized adaptive testing: A primer. . Routledge. https://doi.org/10.4324/9781410605931

Weller, K., Clark, J., Dubinsky, E., Loch, S., McDonald, M., y Merkovsky, R. (2003). Student performance and attitudes in courses based on APOS Theory and the ACE Teaching Cycle. En A. Selden, E. Dubinsky, G. Harel, y F. Hitt, Collegiate Mathematics Education. V (pp. 97-131). American Mathematical Society. https://doi.org/10.1090/cbmath/012/05

Wiliam, D. (3 de 2010). What counts as evidence of educational achievement? The role of constructs in the pursuit of equity in assessment. Review of Research in Education, 34(1), 254-284. https://doi.org/10.3102/0091732X09351544

Williams, C. G. (1998). Using concept maps to assess conceptual knowledge of function. Journal for Research in Mathematics education, 29(4), 414-421. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.29.4.0414

Zazkis, R., y Dubinsky, E. (1996). Dihedral groups: a tale of two interpretations. En J. Kaput, A. H. Schoenfeld, E. Dubinsky, y T. Dick, Collegiate Mathematics Education (pp. 61-82). CBMS Issues in Mathematics Education. https://doi.org/10.1090/cbmath/006/03

© 2024 por los autores. Este artículo es de acceso abierto y distribuido según los términos y condiciones de la licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0) (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).