Polo del Conocimiento
Pol. Con. (Edición núm. 104) Vol. 10, No 3
Marzo 2025, pp. 536-556
ISSN: 2550 - 682X
DOI: https://doi.org/10.23857/pc.v10i3.9072

Un estudio lógico-filosófico de los fundamentos de la Matemática

A logical-philosophical study of the foundations of mathematics

Um estudo lógico-filosófico dos fundamentos da matemática

Gustavo Javier Avila-Gaibor [I]
gustavo.avila@espoch.edu.ec
https://orcid.org/0009-0005-6873-7927

Alex Eduardo Pozo-Valdiviezo [II]
eduardo.pozo@espoch.edu.ec
https://orcid.org/0000-0003-0480-5669

Correspondencia: gustavo.avila@espoch.edu.ec

Ciencias de la Educación
Artículo de Investigación

* **Recibido:** 17 de enero de 2025 ***Aceptado:** 20 de febrero de 2025 * **Publicado:** 11 de marzo de 2025

I. Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH), Ecuador.
II. Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH), Ecuador.

Resumen

El objetivo del presente artículo es realizar un bosquejo de un camino que vaya del silencio de la intuición, hasta las sinfonías de las matemáticas formales, tratando de mostrar los conceptos necesarios e ideas que forman el mencionado camino. Primeramente, se presentan algunas observaciones sobre la naturaleza de la matemática y sus métodos, se enfatiza en las diferencias entre razonamiento y cálculo, destacando la utilidad de este último. Se continúa mostrando la necesidad e importancia de crear un lenguaje apropiado para estudiar la estructura del razonamiento matemático. Luego, se estudia el cálculo de predicados formal y se comenta lo que fundamenta dicho cálculo.

Palabras claves: Lógica; Cálculo Formal; Fundamentos; Sistemas Axiomáticos; Lenguajes formales; Finitismo.

Abstract

The aim of this article is to sketch a path that goes from the silence of intuition to the symphonies of formal mathematics, trying to show the necessary concepts and ideas that form the aforementioned path. First, some observations on the nature of mathematics and its methods are presented, emphasizing the differences between reasoning and calculus, highlighting the usefulness of the latter. The need and importance of creating an appropriate language to study the structure of mathematical reasoning is then shown. Then, the formal predicate calculus is studied and the foundations of said calculus are discussed.

Keywords: Logic; Formal Calculus; Foundations; Axiomatic Systems; Formal Languages; Finitism.

Resumo

O objetivo deste artigo é esboçar um caminho que vai do silêncio da intuição às sinfonias da matemática formal, procurando mostrar os conceitos e as ideias necessárias que formam o referido caminho. Em primeiro lugar, são apresentadas algumas observações sobre a natureza da matemática e dos seus métodos, enfatizando as diferenças entre o raciocínio e o cálculo, destacando a utilidade deste último. A necessidade e a importância de criar uma linguagem apropriada para estudar a estrutura do raciocínio matemático continuam a ser demonstradas. De seguida, estuda-se o cálculo formal de predicados e discutem-se os fundamentos deste cálculo.

Palavras-chave: Lógica; Cálculo Formal; Fundamentos; Sistemas Axiomáticos; Linguagens formais; Finitismo.

Introducción

Un sistema axiomático es, en primer lugar, un sistema. Esto es, ciertos objetos que interactúan de cierta manera. En el caso de la matemática, los sistemas tratan sobre entidades abstractas. A grosso modo, el sistema se dice axiomático pues los hechos del sistema se pueden demostrar desde otros anteriores y primitivos llamados axiomas. Un sistema axiomático está constituido por axiomas, teoremas, conceptos primitivos y derivados. Ejemplos de sistemas axiomáticos son el sistema de los números reales, el sistema de los números naturales o el de grupos algebraicos. Las proposiciones verdaderas (axiomas y teoremas) de un determinado sistema axiomático se entrelazan de cierta manera por un proceso llamado demostración matemática. Este proceso es tema de estudio, ya que se trata de clarificar las leyes y los fundamentos del razonar matemático. Las leyes lógicas deben ser comunes a todos los sistemas axiomáticos. Leyes lógicas que permiten deducir proposiciones verdaderas de proposiciones verdaderas. Este estudio es una parte de la Lógica Matemática. Por tanto, una parte de la Lógica.

Es interesante observar que la Lógica como tal tiene principios y leyes fundamentales. A saber, axiomas. Así, puede emerger la pregunta: ¿la lógica o la teoría de la deducción puede ser axiomatizada? ¿En tal caso, como se deducen sus teoremas de sus teoremas? Es decir, ¿con qué lógica se deducen sus resultados? Esto es, ¿hay una segunda lógica y por tanto, una tercera y así al infinito o existe una lógica fundamental, primitiva, primera y es intuitivamente manejada en aquel nivel elemental? Si es así, ¿para justificar esta lógica primitiva que herramientas se pueden utilizar? Por último, ¿la lógica puede fundamentar la matemática en el sentido de justificar y garantizar el correcto devenir de teoremas en otros teoremas?

Ahora, es claro que la matemática por su máxima pretensión de claridad es el terreno más firme donde se pueda entrenar y observar el razonamiento. Vale decir, por medio de la matemática aprendemos el correcto razonar. También, por medio de la matemática aprendemos a ser más lógicos. De todo lo anterior, se colige que la matemática es un insumo para estudios sobre el entendimiento humano y en particular insumos para la lógica. En efecto, podemos citar a Platón, del cual se dice que recomendó esto al no admitir en su academia ignorantes en geometría. Esto es, se requería matemática para ingresar al resto de saberes. Así, la lógica, en parte, se fundamenta del uso que damos al razonamiento en la matemática. Entonces, vale preguntarse ¿la lógica justifica a la matemática o la matemática a la lógica? Claramente, algunos de los más grandes filósofos han corroborado sus teorías y sistemas filosóficos incorporando la matemática o verificando sus sistemas en las matemáticas o al menos las han tomado muy en consideración. Por ejemplo, Platón, Aristóteles, Hume, Descartes, Espinoza, Kant, Newton, Leibniz, etc. Por tanto estos filósofos han usado la matemática para encaminar su razonamiento. Así, podemos decir que dentro de la lógica y la filosofía, hay matemática y dentro de la matemática, hay lógica y, podría quizá, filosofía. Decimos más, es evidente que todo emprendimiento y estudio necesita de cierto nivel de filosofía, lógica y matemática, en particular para el uso correcto de conceptos. Así, si estudio, lógica o matemática o filosofía, debo usar en cierto grado lógica, matemática y filosofía, lo cual parece una circularidad. Digo esto ya que este estudio participa de esta insalvable necesidad.

Regresando al tema presentado en el primer párrafo, ¿el concepto de sistema axiomático como debe ser estudiado? Por ejemplo, ¿puede ser axiomatizado? Y, ¿si el estudio del concepto "sistema axiomático" se podría llevar a cabo axiomáticamente, que valor tendría? Es decir, ¿si podríamos llevar a cabo el estudio axiomáticamente de un sistema axiomático, mi resultado entraría contenido en mi estudio? Por tanto, los sistemas axiomáticos no se pueden estudiar axiomáticamente.

Así, parece que nos encontramos en la frontera de la matemática, lógica y filosofía. Pero ¿cuál es el método que se debe usar aquí? Por ejemplo, ¿si quiero explicar por qué la poesía es bella, escribiría un poema sobre la belleza de la poesía o quizá, mediría los sonidos, la rimas o analizaría la forma lenguaje? Esto último quizá sea evidente que en este caso no daría resultado. Más, en el contexto antes mencionado, ¿qué haría si quiero explicar por qué la lógica es lógica o para descubrir la esencia de los sistemas axiomáticos, axiomatizaría? En particular ¿debemos analizar la forma del lenguaje? Esto es, ¿del frio uso y forma de lenguaje, emerge, por ejemplo, la belleza en la poesía, o bien, la lógica de los sistemas axiomáticos? Aunque ciertamente, la lógica y la poesía no se puedan comparar en este sentido, pues tienen métodos y fines diferentes. Mas, ¿se puede salir de la mente y pensar desde fuera, como por ejemplo salir de la atmósfera y respirar?

Para ejemplificar la circularidad citada, de manera técnicamente, es conocido el enfoque sobre el sistema ZFE, de la teoría de conjuntos, que pretende servir de fundamento de la matemática. Más, ¿con qué métodos matemáticos y lógicos estudio ZFE, para sostener esta afirmación?

El objetivo es dar algunas ideas sobre estas interrogantes que pueden causar inquietud en la mente de un matemático que comienza a filosofar sobre ellas.

Pol. Con. (Edición núm. 104) Vol. 10, No 3, Marzo 2025, pp. 536-556, ISSN: 2550 - 682X

Axiomas y Cálculo

No pocas fuentes afirman que una de las más bellas ecuaciones matemáticas es la igualdad de Euler. A saber, $e^{i\pi} + 1 = 0$. Sin embargo, es muy seguro que algunos ojos no negarán que la siguiente estructura también contiene misterio y belleza:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabla 1*: Tabla de verdad del implicador material*

Si se profundiza en ella, se encuentran varios inconvenientes. Sea como fuere, esta tabla pertenece a la parte de la lógica matemática llamada cálculo proposicional o de enunciados [HA].

Para abordar el misterio mencionado sobre la tabla anterior, comencemos recordando brevemente los orígenes de la Lógica. Sabemos que su estudio comienza con el estagirita. Una parte de sus estudios se enfocan en los argumentos conocidos como Silogismos. En dicha parte considera, entre otras cosas, las siguientes cuatro proposiciones "Todo A es B", "Todo A no es B", "Algún A es B" y "Algún A no es B", donde A y B son términos. A saber, un término es un concepto, que puede funcionar tanto como sujeto o como predicado en una de alguna de las cuatro proposiciones. Sin embargo, si se nos permite un anacronismo, en la teoría de conjuntos podríamos escribir, las anteriores cuatro proposiciones como, " $A \subset B$ "," $A \subset B^c$","$A \cap B \neq \emptyset$","$A \cap B^c \neq \emptyset$", respectivamente. Considerando siempre la existencia de un conjunto X, tales que $A, B \subset X$ y $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$ y $B^c := X - B$. Así, podremos reescribir el famoso cuadro de la oposición medieval:

$$
\begin{array}{ccc}
A \subset B & \text{———} & A \subset B^c \\
| & \text{Contradictorias} & | \\
A \cap B \neq \emptyset & \text{———} & A \cap B^c \neq \emptyset
\end{array}
$$

Figura 1: *Cuadro de la oposición medieval (análogo)*

Es claro que las opuestas por el vértice son contradictorias. Las otras relaciones (líneas del gráfico) reciben otros nombres. Sin embargo, se espera que el lector pueda dar cuenta de cómo se relacionan. Esto es, cuando pueden ser verdaderas o falsas a la vez dos proposiciones ligadas con una linea, o cual implica a cuál, etc.

Sin embargo, de todo lo que Aristóteles examinó, nos enfocaremos en los mencionados silogismos. Esto es, ¿si se combinan tres términos en tres de estas cuatro proposiciones, de manera que dos sean premisas y una tercera conclusión, es válido el silogismo que se forma? Para entender mejor, considere, por ejemplo, tomar al azar tres términos A, B, C y tres de las mencionadas proposiciones; dos como hipótesis y una como conclusión y preguntémonos si es válido el argumento que se forma. Es decir, de la siguiente manera, sean $A, B, C \subset X$ siempre no vacíos. Si $A \subset B$ y $A \subset C^c$, entonces $C \cap B^c \neq \emptyset$. Se puede formar, de esta manera, 256 combinaciones, esto es 256 silogismos. Naturalmente, la pregunta que surge es: ¿Cuáles son válidos y, quizá más importante, por qué lo son? En efecto, se sabe que 24 son validos [SAA].

Ahora, si se combina tres veces la primera proposición se obtiene el silogismo, bautizado en la época medieval como Barbara. A saber, si $A \subset B$ y $B \subset C$, luego $A \subset C$. Se puede dar cuenta de este último silogismo desde la actual teoría de conjuntos, sin embargo, el estagirita procedió de otra manera. A saber, acepta ciertas leyes de transformación, como, por ejemplo:

- Si $A \cap B = \emptyset$, si y solo si $B \cap A = \emptyset$.
- Si $A \cap B \neq \emptyset$, si y solo si $B \cap A \neq \emptyset$.
- Si $A \subset B$, luego $A \cap B \neq \emptyset$.
- Si $A \subset B$, si y solo si $B^c \subset A^c$.

Después, elige cuatro silogismos como válidos. Da cuenta de esta elección por ser aquellos cuatros silogismos "especialmente científicos". Acepta axiomáticamente los siguientes cuatro:

- Si $A \subset B$ y $B \subset C$, luego $A \subset C$.
- Si $A \subset B^c$ y $C \subset B$ luego $A \subset C^c$.
- Si $B \subset A$ y $B \cap C \neq \emptyset$, luego $A \cap C \neq \emptyset$.
- Si $A \subset B^c$ y $C \cap B \neq \emptyset$ luego $C \cap A^c \neq \emptyset$.

Además, requiere usar principios superiores. A saber, El Principio de no Contradicción, de Tercio Excluido y de Identidad. Con esto logra demostrar cuales son válidos.

Se muestra a continuación un ejemplo. Veamos la validez del silogismo llamado Baroco. El cual es, Si $A \subset B$ y $C \cap B^c \neq \emptyset$, luego $C \cap A^c \neq \emptyset$. En efecto, supongamos por reducción al absurdo que, $C \cap A^c = \emptyset$. De donde, se sigue que $C \subset A$. Sabemos además que se dan las hipótesis $A \subset B$

Pol. Con. (Edición núm. 104) Vol. 10, No 3, Marzo 2025, pp. 536-556, ISSN: 2550 - 682X

y $C \cap B^c \neq \emptyset$. Así tenemos que se dá, $C \subset A$ y $A \subset B$. Por Barbara, tenemos $C \subset B$. Así, $C \cap B^c \neq \emptyset$ y $C \subset B$. Lo cual es una contradicción.

Ahora bien, adicionalmente, el filósofo dio reglas de "cálculo" para afirmar cuando un silogismo es válido o inválido. Esto es, se dieron reglas formales para el manejo correcto de los términos. Más precisamente, para que un silogismo sea válido, los términos deben estar correctamente distribuidos y cumplir ciertos roles precisos. Aunque estas últimas reglas no aportan información sobre la esencia de la validez, son muy prácticas, lo cual es el objetivo de un cálculo, en el sentido de leyes simples que se pueden verificar fácilmente ([VE]).

También mencionamos que existe formas de ver los silogismos con diagramas de Ven ([VE]).

Reglas y Enunciados

Ahora bien, en la actualidad sucede algo parecido. Consideremos la lógica proposicional. En aquella tenemos ciertos axiomas sobre el concepto proposición junto con conectores lógicos, que son parte de un lenguaje formal (artificial). Más precisamente, las mencionadas reglas son ([GEB]):

1. Regla de agrupamiento: Si x, y son teoremas, luego $(x \wedge y)$ es un teorema.
2. Regla de disociación: Si$(x \wedge y)$ es un teorema, entonces tanto x es un teorema como y es un teorema.
3. Regla de la doble negación: la cadena $\neg\neg$ puede ser quitada o incluida en cualquier teorema.
4. Regla fantasiosa: Si supuesto x, luego, se puede derivar por medio de alguna regla y, se tiene que $(x \Rightarrow y)$ es un teorema.
5. Regla de traslado: Cualquier teorema puede ser empleado dentro de una derivación, de una regla fantasiosa.
6. Regla de separación: Si x y $(x \Rightarrow y)$ son teoremas, se sigue que y es teorema.
7. Regla de contraposición: $(x \Rightarrow y)$ y $(\neg y \Rightarrow \neg x)$ puede ser intercambiadas en cualquier derivación.
8. Regla de Morgan: $(\neg x \wedge \neg y)$ y $\neg(x \vee y)$ pueden ser intercambiables en una derivación.
9. Regla de Quitapongo: $(x \vee y)$ y $(\neg x \Rightarrow y)$ pueden ser intercambiables en una derivación.

El autor, que describe en su obra las citadas reglas ([GEB]), también refiere lo siguiente: *El cálculo proposicional nos aporta un conjunto de reglas para producir proposiciones que serían*

Pol. Con. (Edición núm. 104) Vol. 10, No 3, Marzo 2025, pp. 536-556, ISSN: 2550 - 682X

verdaderas en todos los mundos posibles. Es por ello que todos sus teoremas dan la impresión de ser tan simples, al punto de parecer carecer por completo de contenido [...]existe un procedimiento mecánico que diferencie entre teoremas de no teoremas[...] Resulta que existe un interesante procedimiento de decisión el método de las tablas de verdad.

En resumen, lo que se desea notar es que Aristóteles argumentó sobre como elige los axiomas de su sistema y como demuestra silogismos a partir de ellos. Sobre esto aplicó reglas de "cálculo" que "facilitó" las demostraciones de validez de silogismos analizando como se distribuyen los términos de sus silogismos. Esto último es similar a las tablas de verdad. Observe que, si se considera una fórmula extensa de proposiciones con conectores, el camino para llegar a su demostración por medio de las 9 reglas citadas arriba puede ser nada evidente y muy largo. Sin embargo, las tablas de verdad facilitan la comprobación de estas cadenas de enunciados en un numero finito de pasos, los cuales se encuentran relacionados con razonamientos. Vale la pena decir que esta conexión entre tablas de verdad y la estructura lógica de arriba está demostrada (ver [HA]).

Así, nuestro sentido común nos dice que el razonamiento no se basa en el cálculo; más, el cálculo se basa en el razonamiento. Decimos esto, porque se observa, sobre todo en cursos iniciales de pregrado en matemática, que para dar cuenta de que un razonamiento es válido, se recurre a las tablas de verdad del cálculo proposicional, sin saber por qué funcionan tan bien. Lo cual, podría constituir una desventaja al desconocer el fundamento, ni la razón de dicho cálculo. Con esto no se desea dejar de lado el hecho de que dicha tabla es muy controversial, a la vez que muy útil.

En la siguiente sección se profundiza sobre el origen de las reglas citadas arriba y sobre lo mencionado en el párrafo anterior.

Sobre la necesidad de analizar y crear un lenguaje

Para entender una afirmación, debemos comprender que significan las palabras que se emplean. Definir conceptos y transmitir ideas es un problema antiguo y actual. Por ejemplo, Platón en sus diálogos, por boca de Sócrates, muestra este problema al tratar de definir ciertos conceptos. En efecto, en el dialogo "La República", en el "Libro Primero", cuando Polemarco cita la frase de Simonides: "La justicia es dar a cada quien lo debido" se ve a Sócrates tratando de clarificar la frase, para concluir que Simonides se ha expresado de manera enigmática y poética, es decir, se ha expresado sin precisión y metafóricamente. Aunque definir justicia es controversial incluso en la actualidad. Relacionada con esto también está la célebre paradoja del montón. Esto muestra lo indispensable de procurar un lenguaje, donde las palabras o símbolos estén definidos claramente,

Pol. Con. (Edición núm. 104) Vol. 10, No 3, Marzo 2025, pp. 536-556, ISSN: 2550 - 682X

sobre todo en temas científicos, para que las ideas sean trasmitidas y discutidas sin ambigüedad. A propósito, es conocido que Sócrates sostenía que la virtud es conocimiento. No tendría sentido, si refuto su máxima definiendo virtud y conocimiento de cierta manera tal que la virtud no sea conocimiento. Debemos entender que es para Sócrates virtud y conocimiento, para entender su argumento y luego aceptarlo o refutarlo.

Decimos más, si consideremos textos antiguos, como los de Platón o Aristóteles, es sabido que las traducciones al castellano del siglo XVI son diferentes a las del siglo XX. No solo en cuanto a su forma, también en el uso y significado de las palabras, como tiempo, espacio, virtud, felicidad, conocimiento, etc. Es decir, el uso de estas palabras ha variado, en parte debido a que estos textos son usualmente modificados por intérpretes y también por que ellas varían culturalmente.

Además, otro aspecto es que ciertas palabras existen en unos idiomas y en otros no. Por ejemplo, en el idioma latín existe una palabra para el "o inclusivo" y otra para el "o exclusivo", no así en el español. Esto hace más preciso el lenguaje en dicho aspecto. Otro ejemplo tenemos en el idioma Ruso, donde existen tres palabras diferentes para lo que en español decimos con una palabra. Es efecto, existe una palabra para el "si condicional". Por ejemplo, en la oración "**Si** hoy es lunes mañana es martes" y otra palabra para el "si no condicional" por ejemplo para oraciones "No sé **si** comer arroz en la cena de hoy", y otra palabra para "si", cuando respondemos afirmativamente, por ejemplo, en oraciones como "**Sí**, Juan quiere azúcar en su chocolate", la cual responde a la pregunta: ¿Juan quiere azúcar en su chocolate? Lo que se desea expresar con estos ejemplos es que las palabras juegan distintos roles en el lenguaje. Esto es, una misma palabra puede obedecer a distintas estructuras lógicas que pueden no estar relacionadas. Así, debemos enfocarnos en determinada función, que deseamos con una finalidad, más que en cómo se usa la palabra en todas las circunstancias de un lenguaje determinado. Se explica esto por qué se desea evitar ciertas confusiones usuales, que se hace sobre la diferencia del significado de los conectores lógicas y el de aquellos conectores en el lenguaje natural.

Así, tenemos las siguientes situaciones a considerar:

- Dada la pretensión de claridad de la matemática, lo antes dicho motiva a clarificar las oraciones matemáticas con el máximo rigor posible, esto obliga a construir lenguajes artificiales apropiados para lo que necesitamos expresar, donde cada símbolo esté definido.
- Más aun, la libertad con la que usamos el lenguaje cotidiano permite crear frases paradójicas como: “Esta oración es falsa"

Pol. Con. (Edición núm. 104) Vol. 10, No 3, Marzo 2025, pp. 536-556, ISSN: 2550 - 682X

Ciertamente, la citada oración es falsa si, y solo si, es verdadera. Una de las razones de esta paradoja, como de otras, **es porque el todo (la oración) ocupa el mismo lugar semántico que la parte (el sustantivo)**. Se suele decir que el problema es la autorreferencia ([GEB], [ITC]).

Así, parecería que la sintaxis debiera limitar la formación de estas frases. Es decir, se necesita un lenguaje artificial que trate de evitar la formulación de aquel tipo de frases. Aproximadamente, un lenguaje donde, entre otras cosas, los sustantivos no se salgan de la oraciones.

- Además, como el pensamiento se refleja en el lenguaje, si elegimos este último de manera apropiada, es decir si lo elegimos evitando los mencionados inconvenientes (entre otros); decimos que, si elegimos así el lenguaje, su estructura, reflejará nuestros procesos mentales, aportando informaciones sobre dichos procesos y sobre el objeto que estudiamos, esto es, en el presente estudio, sobre la matemática [ML].

Para matizar estas observaciones, a modo de ejemplo, se presentarán cuatro teoremas con sus demostraciones. El objetivo es, en cuanto sea posible, hacer visible la estructura de los razonamientos que unen las hipótesis con las consecuencias, así como el uso del lenguaje. De esta manera, se introduce el tema que se refiere al análisis de la deducción matemática y principalmente la necesidad de descender al estudio de la sintaxis del lenguaje.

Esperamos que el lector esté familiarizado con el uso del lenguaje formal para poder traducir las siguientes proporciones al lenguaje técnico o natural de la matemática. Como se ha dicho, este es un recurso que nos permite ser más precisos en lo que decimos, lo cual es beneficioso, entre otras cosas, para analizar las estructuras de los razonamientos. Sin embargo, por el momento, el objetivo no es enfocarnos en la exactitud del lenguaje, más en comprender la importancia de su buen uso y estudiar los razonamientos que se dan en la matemática. Será como ver una ciudad desde lo alto sin preocuparnos si los edificios están bien dispuestos.

Variables

Vale la pena mencionar, que para los autores del presente texto, una variable es un signo al cual podemos predicar de la esencia de algún conjunto, definición, concepto o noción. Grosso modo, le podemos predicar cualquier propiedad común a todos y cada uno de los elementos de la noción (la extensión del concepto). Por ejemplo, si decimos: sea $x \in \{a, e, i, o, u\}$. Podemos predicar a x de la esencia del conjunto. Aunque formalmente x no sea una vocal del español, podemos predicar de su esencia. Esto es, soportamos decir, en este caso " $x = a$ o $x = e$ o $x = i$ o $x = o$ o $x =$ u ", pues toda la anterior frase es la esencia del conjunto. Sin embargo, no podemos decir $x = e$, pues

e no es algo común a todos los elementos. Podemos decir, x es cualquier vocal, pero no nos consentimos decir x es una determinada vocal. Lo que podemos decir es, x puede ser en potencia cualquier, pero no que es en acto, algún elemento determinado. Sin embargo, es diferente si se está suponiendo que es un determinado elemento para alguna deducción usual de tipo "si..., entonces…". Decimos más, por ejemplo, la palabra hombre, no es un hombre. Pero la predicamos de las características comunes a los hombres, por ejemplo: "hombre es un animal racional". Comúnmente, se da la definición de proposición y se dice "sea P una proposición", para predicarle de las cualidades que contiene la noción. Incluso podremos decir sea t una variable del conjunto de variables de cierto lenguaje, etc. Más aun, dejando de lado la intrincada ontología, puedo incluso decir, sea ω una noción o sea ω un ser. Sin embargo, desde este enfoque no siempre se puede asumir que la noción, concepto forme o constituya un todo. Por ejemplo, no consentimos decir, el conjunto de las proposiciones como un todo actual, más si potencialmente infinito.

Teoría de grupos

Ahora, consideremos una demostración dentro de la teoría de grupos algebraicos. Es conocido ([ML]) que, un grupo es un conjunto G donde se ha definido una operación binaria $*$, los cuales satisfacen los siguientes hechos:

A1 $(\forall a, b, c \in G)(a * (b * c) = (a * b) * c)$

A2 $(\exists e \in G)((\forall a \in G)(a * e = e * a = a) \wedge (\forall a \in G)(\exists b \in G)(a * b = b * a = e))$

Sea $x \in G$ una variable del conjunto G. Por comodidad, llamaremos $P_1(x)$ a la proposición

$$((\forall a \in G)(a * x = x * a = a) \wedge (\forall a \in G)(\exists b \in G)(a * b = b * a = x))$$

Teorema 1. Sea $(G,*)$ un grupo. Sean $e_1, e_2 \in G$ dos elementos de G, tales que se da $P_1(e_1) y$ $P_1(e_2)$. Entonces, $e_1 = e_2$.

Demostración. Sean $e_1, e_2 \in G$ dos elementos que satisfacen $P_1(e_1)$ y $P_1(e_2)$. Así, en particular se cumple $(\forall a \in G)(a * e_1 = e_1 * a = a)$ y $(\forall a \in G)(a * e_2 = e_2 * a = a)$. Así, como $e_1 \in G$ y $(\forall a \in G)(a * e_2 = e_2 * a = a)$, se sigue que $e_1 * e_2 = e_2 * e_1 = e_1$. Similarmente, como $e_2 \in G$ y $(\forall a \in G)(a * e_1 = e_1 * a = a)$, se sigue que $e_2 * e_1 = e_1 * e_2 = e_2$. Pues bien, como $e_2 * e_1 = e_1 * e_2 = e_2$ se tiene que $e_2 * e_1 = e_2$. Similarmente, como $e_1 * e_2 = e_2 * e_1 = e_1$, se tiene que $e_2 * e_1 = e_1$. Luego, $e_2 * e_1 = e_2$ y $e_1 * e_2 = e_1$. Por lo tanto, $e_1 = e_2$.

Una vez que se prueba la anterior proposición, la cual está significando que dados los Axiomas A1 y A2, resulta que el conjunto de elementos que afirma A2 que existen es unitario. Esto último nos faculta ponerle un nombre constante a dicho único elemento, a saber, por ejemplo, llamarlo e.

Pol. Con. (Edición núm. 104) Vol. 10, No 3, Marzo 2025, pp. 536-556, ISSN: 2550 - 682X

¿Qué es lo que une los hechos? En la segunda oración que garantiza que si admitimos $P_1(e_1)$, luego $(\forall a \in G)(a * e_1 = e_1 * a = a)$. Parece claro que esta es una implicación directa, es decir que hay una regularidad entre la hipótesis y la consecuencia. Esto es, hay una conexión entre los dos sucesos: tener dos proposiciones P y Q verdaderas concluir que cualquiera de las dos se da, por ejemplo, concluir que Q es verdadera (ver Regla de disociación enunciada más arriba).

Con respecto a la regularidad digamos dos palabras. En efecto, sabemos que en el mundo físico una relación causa efecto supone una regularidad entre dos sucesos, en el que un suceso siempre antecede temporalmente al otro. El primero es causa del segundo. La causalidad puede ser inmediata, esto es cuando no hay un mecanismo que medie entre la causa y el efecto. Por ejemplo, dos bolas rígidas y esféricas A y B, chocan. Una está en reposo, por ejemplo B, y la bola A choca con la bola B. Por lo cual, simplemente la bola A es causa del movimiento de la B. Esta es una regularidad en el mundo físico. Se puede decir más, la bola A ejerce una fuerza sobre la bola B, lo que causa una aceleración en B. Esta fuerza es la responsable de cambiar el estado de reposo de la bola B. Vale preguntar: ¿por qué la bola A tiene una fuerza? se podría responder es ya que precisamente el impacto genera una aceleración. En conclusión, se dice que es ya que una fuerza genera una aceleración, Esto último es un implicación directa, desde el punto de vista clásico. Como otros ejemplos de implicaciones directas, podríamos preguntarnos ¿por qué la masa deforma el espacio tiempo? Son causas inmediatas. La naturaleza funciona así y responde a leyes, con las que podemos progresar como humanidad. Podría parecer que Aristóteles diría que dichas leyes inmediatas se dan por naturaleza.

Prosiguiendo se afirma que de $e_1 \in G$ y $(\forall a \in G)(a * e_2 = e_2 * a = a)$ se sigue que $e_1 * e_2 = e_2 * e_1 = e_1$. Observe que, para la pregunta ¿por qué esta argumentación es verdad? se debe acudir a una estructura más general, donde la ley de la analogía se cumpla. Así, ciertamente lo que se tiene es que si A es un conjunto y si x es un sustantivo de una proposición $P(x)$, entonces si $a \in A$ (esto es a es una variable del conjunto A) y $(\forall x \in A)(P(x))$, se sigue $P(a)$.

Observe atentamente que se debe descender a la forma, a la sintaxis, para concluir que esto es válido, porque se debe cumplir en todos los sistemas axiomáticos sin importar el contenido. Esto es, se debe analizar la estructura del lenguaje sin considerar el contenido de las proposiciones. Bajo este requisito, vamos observas patrones que se dan con regularidad en las deducciones matemáticas.

Pol. Con. (Edición núm. 104) Vol. 10, No 3, Marzo 2025, pp. 536-556, ISSN: 2550 - 682X

Por otro lado, se puede tener que dos proposiciones se impliquen de manera mediata, esto es mediante otros razonamientos inmediatos anteriores. Uno de los objetivos es encontrar que implicaciones son directas, inmediatas o axiomáticas para justificar las demás y cuales son proposiciones que se pueden deducir.

Regresando al ejemplo anterior, también, se ha utilizado ciertas propiedades de transitividad que cumple la relación que llamamos igualdad. La cual es una forma particular de predicado que debe ser axiomatizada, al ser una relación básica. Así, por el momento, tenemos las siguientes leyes:

S1: Si se da P y Q, luego se da, por ejemplo, solo P.

S2: Si se tiene que a es una variable o constante de A y $(\forall x \in A)(P(x))$, se sigue $P(a)$.

Análisis real

Ahora, consideremos un resultado sencillo del análisis matemático acerca de la continuidad de una función constante.

Teorema 2. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida para todo $x \in \mathbb{R}$, como $f(x) = 7$. Entonces, f es continua en $\mathbb{R}$.

Debemos demostrar que $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall y \in \mathbb{R})(|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$. Observemos que $(\forall a, b \in \mathbb{R})(|f(a) - f(b)| = |7 - 7|)$ y además $7 - 7 = 0$. Así, $(\forall a, b \in \mathbb{R})(| f(a) - f(b) |= 0)$. Ahora, dados $x \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$, debemos hallar $\delta > 0$ tal que $(\forall y \in \mathbb{R})(|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$. Sea $\delta = \varepsilon$. Sea $y \in \mathbb{R}$. Si $|x - y| < \delta$, y, puesto que $|f(x) - f(y)| = 0$, se tiene que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Analicemos, como se transforman las proposiciones: Dejando, por lo pronto, el análisis de los cuantificadores, tenemos que, dados $x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0, \delta = \varepsilon, y \in \mathbb{R}$, y si por hipótesis aceptamos que $|x - y| < \delta$, ¿de dónde se sigue que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$? Se ve que dados $x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0, \delta = \varepsilon, y \in \mathbb{R}$ y ya que $(\forall a, b \in \mathbb{R})(|f(a) - f(b)| = 0)$, luego $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Así, por decirlo de alguna manera, dentro del universo de las condiciones $x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0, \delta = \varepsilon$, y $y \in \mathbb{R}$, tenemos como un hecho la proposición $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, a la cual llamaremos Q. Ahora, en este mismo contexto, si suponemos verdadera la proposición $|x - y| < \delta$, a la cual llamaremos P, tenemos que se da P y se dá Q, luego tenemos que se da Q. Es decir, si suponemos P , como se da Q , se tiene $P \wedge Q$ y por tanto tenemos Q. Así por una especie de transitividad se tiene que $P \Rightarrow Q$. Esto es, $Q \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$. Como Q es un hecho, se sigue que $P \Rightarrow Q$ que es lo que queríamos demostrar. Profundicemos más en esto último.

Pol. Con. (Edición núm. 104) Vol. 10, No 3, Marzo 2025, pp. 536-556, ISSN: 2550 - 682X

La estructura abstraída que se ha obtenido es: "sabemos Q, suponemos P tenemos $P \wedge Q$, luego Q''. ¿Formalmente cómo sería esto? Primeramente, veamos la forma del razonamiento: "sabemos Q, suponemos P'', esta podría traducirse como $P \wedge Q$. Es decir, a primera vista "saber Q y suponer P$''$, podía ser $Q \wedge P$, en tal caso, por todo lo anterior, estaríamos concluyendo $P \wedge Q$, lo cual no aporta mucho y además no es lo que queremos demostrar, que es $P \Rightarrow Q$. Consideremos la siguiente distinción. Saber Q es simplemente poner Q. Suponer P , es grosso modo $P \Rightarrow$. Así. Saber Q y suponer P sería $Q \wedge (P \Rightarrow)$. Así, saber Q, suponemos P y concluimos Q, sería $Q \wedge (P \Rightarrow Q)$. Digo más, tratando de hallar mayor generalidad, saber algo en matemática es de cierta manera suponer. Luego, si se supone Q (se sabe), y suponemos P, concluimos Q. Esto es, $Q \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$. Ahora, como sabemos que se da Q, podemos concluir $P \Rightarrow Q$ que nuevamente es lo que queríamos demostrar. Por favor, tenga presente que hay una relación entre las fórmulas $Q \wedge (P \Rightarrow Q)$ y $[Q \Rightarrow (P \Rightarrow Q)]$ (puede usar tablas de verdad). Compare este resultado con la Regla 5 de (2.1) y con la regla K1 de (4) que está más adelante.

Observemos que, la explicación en este caso no hace alusión al contenido de las proposiciones, es decir, es formal. Ciertamente desde la antigüedad las funciones constantes son continuas. Sin embargo, parece que la lógica está adecuada en muchos casos a dar sentido a estas proposiciones o, podría ser que, estas demostraciones motivan las leyes de la lógica.

Por otro lado, parecería que $Q \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$, cuando no se aplica en un contexto como el anterior, no tiene sentido. Es decir, es una frase que en la cotidianidad no se usa. A saber, nadie dice algo como "Si Juan es ecuatoriano, entonces: Si mi perro corre, luego juan es ecuatoriano". Entonces, parecería que proviene de una lógica construida con cierta finalidad, que no deviene inmediatamente de la vida cotidiana, la cual debe ser aprendida y practicada, para ser entendida. Esto, se supone, es un consuelo para los estudiantes que se sienten confundidos en cuanto a demostrar se refiere, pues es una lógica que se aprende con el tiempo y la práctica.

Números Naturales

Hasta ahora no se ha necesitado precisar dos cuestiones: La primera es que cuando escribimos $(\forall a \in A)(P(a))$ esta es una simplificación de la frase $(\forall a)(a \in A \Rightarrow P(a))$. Tomamos en cuenta que el cuantificador universal trabaja dentro de un conjunto o dominio previamente definido (el universo que se está considerando). No es necesario imponer límites, porque están implícitos. Similarmente la formula $(\exists a \in A)(P(a))$ es una simplificación de la frase $(\exists a)(a \in A \wedge P(a))$.

Pol. Con. (Edición núm. 104) Vol. 10, No 3, Marzo 2025, pp. 536-556, ISSN: 2550 - 682X

Análogamente al cuantificador universal, en este caso se entiende implícitamente que existe un elemento dentro del universo donde se esté trabajando ([AL]).

Lo que sigue se basa en $[AR]$. Consideremos ahora un resultado sobre los números naturales. Sabemos que, son un sistema que tiene un inicio, no tiene fin y cada miembro tiene un siguiente. Y, existe una suma, un producto, los cuales tiene alguna relación con la idea "de siguiente" o "de sucesor".

Más precisamente, los números naturales son elementos del conjunto $\mathbb{N}$, el cual está dado por los siguientes hechos. Existe una función inyectiva $S: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (sucesor o siguiente) tal que:

1. $\mathbb{N} - S(\mathbb{N})$ consta de un solo elemento, que denotaremos.
2. Si $X \subset \mathbb{N}$ y se tiene que $1 \in X$ y $(\forall n \in \mathbb{N})(n \in X \Rightarrow S(n) \in X)$, luego se tiene que $X = \mathbb{N}$.

Ahora bien, de lo anterior se coligen los siguientes hechos: $(\forall n)(n \in \mathbb{N} \wedge S(n) \in \mathbb{N}), (\forall n \in \mathbb{N})(S(n) \in \mathbb{N})$ o también que $(\forall n \in \mathbb{N})(S(n) \neq 1)$. Tratemos de observar en que sentido se da, por ejemplo, la primera afirmación. En efecto, con el propósito de manejar mejor la definición de función debemos decir que $S: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ significa que, $S \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y

$$(\forall x \in \mathbb{N}) \left[(\exists y \in \mathbb{N})((x,y) \in S) \wedge (\forall y_1, y_2 \in \mathbb{N}) \left(\left((x, y_1) \in S \wedge (x, y_2) \in S \right) \Rightarrow y_1 = y_2 \right) \right]$$

Bajo estas condiciones, si $x \in \mathbb{N}$, como existe $y \in \mathbb{N}$ tal que $(x,y) \in S$ y este y es único para el x, podemos poner $S(x) := y$ Así, $(x, S(x)) \in S$. De donde se sigue que $(x, S(x)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Así $(\forall x)(x \in \mathbb{N} \wedge S(x) \in \mathbb{N})$ Ahora, si tratamos de justificar formalmente, como se transforma la fórmula anterior (1) en $(\forall x)(x \in \mathbb{N} \wedge S(x) \in \mathbb{N})$, que diríamos?

Podríamos decir que la unicidad nos permite nombrar al elemento en cuestión de cierta manera, donde se note la dependencia del elemento para el cual es único. Por decirlo de alguna manera, suprimir el cuantificador existencial de la oración. Esto es: Si tenemos,

$$(\forall x \in \mathbb{N}) \left[(\exists y \in \mathbb{N})((x,y) \in S) \wedge (\forall y_1, y_2 \in \mathbb{N}) \left(\left((x, y_1) \in S \wedge (x, y_2) \in S \right) \Rightarrow y_1 = y_2 \right) \right]$$

definiendo $y =: S(x)$, podemos concluir que $(\forall x)((x, S(x)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N})$, luego, $(\forall x \in \mathbb{N})(S(x) \in \mathbb{N})$. Evidentemente, esta es una frase reducida, donde se sobre entiende la unicidad. En fin, estos movimientos de símbolos deben ser precisados. En estas lineas solo hacemos ver su necesidad.

Por otro lado, para analizar la última formula $(\forall n \in \mathbb{N})(S(n) \neq 1)$, tenemos que, desde la teoría de conjuntos (informal) la Afirmación 1 implica que:

$$(\forall m \in \mathbb{N})[(\forall n \in \mathbb{N})(S(n) \neq m) \Longleftrightarrow m = 1]$$

De donde, en particular el contra reciproco es,

$$(\forall m \in \mathbb{N})[m = 1 \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(S(n) \neq m)]$$

si tomamos una variable $m \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$(m = 1) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(S(n) \neq m)$$

En forma general, si $(m = 1) \Rightarrow P(m)$, con $P(m)$ una proposición con sustantivo m, obtenemos $P(1)$. En nuestro caso, $(\forall n \in \mathbb{N})(S(n) \neq 1)$. Se debería hacer hincapié en como eludimos el cuantificador universal, lo cual sin duda fue un paso importante, y luego como lo recuperamos.

Por último, para continuar con el estudio de como las fórmulas se derivan unas de otras formalmente, esto es, con que lógica, así como analizar cuáles son las fórmulas primitivas, veamos un último ejemplo.

Teorema 3. $(\forall n \in \mathbb{N})(S(n) \neq n)$

Demostración. Llamemos, $P(n)$ a la afirmación $S(n) \neq n$. Ciertamente, está afirmación se debe probar por inducción. Esto es, para mostrar que $(\forall n \in \mathbb{N})P(n)$, debemos probar que se da $P(1)$ y $(\forall n \in \mathbb{N})(P(n) \Rightarrow P(S(n)))$.

Veamos que se tiene $P(1)$. En efecto, como $1 \in \mathbb{N}$ y $(\forall n \in \mathbb{N})(S(n) \neq 1)$, se sigue que $S(1) \neq 1$. Ahora, veamos que $(\forall n \in \mathbb{N})(P(n) \Rightarrow P(S(n)))$. Tenemos que las siguientes fórmulas se transforman en la que deseamos:

- $(\forall n)(n \in \mathbb{N} \wedge S(n) \in \mathbb{N})$.
- $(\forall k \in \mathbb{N})(\forall l \in \mathbb{N})(k \neq l \Rightarrow S(k) \neq S(l))$ (inyectividad de S)

A saber, de la primera fórmula dada n una variable de $\mathbb{N}$, se tiene que $n \in \mathbb{N} \wedge S(n) \in \mathbb{N}$. De donde por la segunda formula, $(n \neq S(n) \Rightarrow S(n) \neq S(S(n)))$. Por hipótesis inductiva tenemos que $n \neq S(n)$, se sigue, por Modus Ponens, que $S(n) \neq S(S(n)))$. Así, se tiene que $(\forall n \in \mathbb{N})(P(n) \Rightarrow P(S(n)))$. Por lo tanto $(\forall n \in \mathbb{N})(S(n) \neq n)$

Así surge la necesidad de dar cuenta de lógica con que se derivan estas fórmulas y cuáles de ellas son axiomas. Sin embrago, se reitera la idea, de que la lógica nace, en parte, considerando los juicios matemáticos. Como si en una figura de yin yang, si vemos microscópicamente la parte blanca encontramos negro, y de igual manera en la parte negra descubrimos blanco. Es decir, hay matemática en la lógica y lógica en la matemática.

Cálculo de Predicados Formal

Se ha tratado de introducir una forma particular de ver las matemáticas. Vale la pena mencionar que estos problemas ya fueran abordados en la época de la crisis de los fundamentos de la

Pol. Con. (Edición núm. 104) Vol. 10, No 3, Marzo 2025, pp. 536-556, ISSN: 2550 - 682X

matemática. Lo cual generó un nuevo acto de conciencia. A saber, entre otras cosas, ser más cocientes del recorrido que hay de una verdad a otra.

Sabemos que de manera muy simplificada existen tres aspectos en el lenguaje de proposiciones con verbo copulativo "ser". El primer aspecto son sustantivos o términos, tales como $5, x + y^2$, etc. Se observa que en los mismos hay variables, constantes, operaciones como sumas, productos, etc. El segundo aspecto del lenguaje es los predicados, que junto con los términos o sustantivos forman proposiciones, tales como $5 \neq 3 + 9$. Además, hay proposiciones con cuantificadores $(\forall x)(x + y^2 = 7)$. El tercer aspecto del lenguaje son palabras que permiten conectar estas proposiciones para formar argumentos, oraciones más grandes y párrafos.

Vale la pena mencionar, una proposición, en este caso se llama fórmula bien formadas (fbf), pues tiene una estructura más detallada que un simple enunciado, como los vistos en el primer capítulo, ya que intervienen operaciones, cuantificadores y predicados. Por ejemplo $(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(f(x, y))$)), donde f puede ser una función que opere x con y; y P, Q predicados, como por ejemplo "mayor que", "igual que", etc.

Ahora, es relevante a nuestro juicio, hacer notar como se define una fbf. Básicamente, se parte de símbolos iniciales, potencialmente infinitos (no actualmente). Sobre este "conjunto de símbolos" se aplica un número finito y determinado de leyes para formar cadenas de símbolos. Así, la definición es tal que una fbf puede ser verificada como tal, en un número finito de pasos. Esta forma de definir se conoce como Definiciones por inducción generalizada (ver para más detalles [HA] o [ML]). Esta es una forma de proceder muy precavida, pues para el mencionado estudio se debe usar la matemática menos controversial, por ello, por decirlo de alguna forma, se discrimina al infinito actual y no numerable. Una opción para llevar a cabo este análisis es el Finitismo (para más información sobre este tema ver [LLF]). Por decirlo de alguna forma, es la parte considerada por muchos, como David Hilbert, como la más incuestionable de la matemática, la cual sirve de base para analizar matemáticamente los lenguajes, que a su vez contribuye a garantizar la validez del formalismo, el cual pretende dar razón de toda la matemática [LLF]. Aunque, es sabido, por los axiomas de incompletitud de Kurt Gödel que esta postura presenta problemas [HA]. **Las definiciones por inducción generalizada tienen además las ventajas de delimitar estrictamente qué pertenece al "conjunto" o "noción". Además, proporcionan una base para**

Pol. Con. (Edición núm. 104) Vol. 10, No 3, Marzo 2025, pp. 536-556, ISSN: 2550 - 682X

demostrar propiedades sobre los elementos del conjunto o noción [ML], como veremos a continuación.

Basándonos en el libro Hamilton A. G. [HA], tenemos los siguientes axiomas que dan cuenta de todos los movimientos válidos que podemos hacer en un lenguaje de primer orden. Los términos que se usan en los axiomas serán detallados al finalizar los enunciados de estos.

Sean A, B, C f.b.f, se tiene que:

K1 $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

K2 $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

K3 $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

K4 Si x es una variable que no aparece libre en la proposición A, se tiene que

$$((\forall x)A) \Rightarrow A$$

K5 Si $A(x)$, es una fbf, con sustantivo x, o que aparezca x en algún lugar, yt es un termino libre del lenguaje, entonces se tiene que

$$((\forall x)(A(x))) \Rightarrow A(t)$$

K6 SiA no tienen intervenciones libres de la variable x, entonces

$$(\forall x)(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow (\forall x)B)$$

MP (Modus Ponens): Si se da A y $A \Rightarrow B$, luego se puede concluir B.
G (Generalización): Si se tiene A, simplemente admitiremos que es verdad que $(\forall x)A$, para cualquier variable x, aparezca o no en la formula A.

Antes de aclarar los axiomas presentados y los términos empleados en ellos, vale mencionar que, podría resultar notorio, que existe una sobre-generación de fórmulas. Es una consecuencia de la generalidad que se ha adquirido. Sin embargo, cuando se aplica para definir o indagar en cuestiones matemáticas se ve su utilidad. Podría pensarse que es como una licuadora, si pones arena de mar y agua, te dará un licuado indigerible; más, si pones frutas, será de utilidad. Se dice más, parecen demasiado evidentes algunas de los anteriores axiomas, pero en el fondo de las demostraciones son estos pasos simples los que se necesitan visibilizar.

Con respecto a K1, K2 y K3, son axiomas comunes a la lógica de enunciados, los cuales implican las reglas citadas antes en la sección anterior 2.1. Para entender K4, debemos aclarar algunas cosas sobre cuando una variable aparece libre en una fbf. Para ello daremos algunas ideas no rigurosas. En efecto, es libre en alguna intervención de una fbf si ningún cuantificador le está afectando o si no es la variable del cuantificador, por ejemplo: Sea y una variable del lenguaje, consideremos

Pol. Con. (Edición núm. 104) Vol. 10, No 3, Marzo 2025, pp. 536-556, ISSN: 2550 - 682X

$$\neg(\forall x)(x + y \neq 0)$$

la variable y es libre y x no es libre. En efecto, x está en el cuantificador, el cual está afectando a la fórmula $x + y \neq 0$. Mientras que y es libre. Adicionalmente, observe que dada una variable y del lenguaje, la fórmula de arriba es equivalente a $(\exists x)(x + y = 0)$. Consideremos otro ejemplo:

$$(\forall x)(x < y \Rightarrow (\forall y)(x + y \leq 0))$$

en este último caso, x en ninguna intervención es libre (tiene tres intervenciones), sin embargo y en la primera intervención de la izquierda es libre, pero en las intervenciones de la derecha no es libre.

Ahora, ¿cuándo una intervención de una variable en un f.b.f está libre para ser intercambiada por alguna otra o algún término diferente del lenguaje? Por ejemplo, es evidente que las dos siguientes fórmulas son equivalentes $(\forall x)P(x)$ y $(\forall y)P(y)$. Es decir, el sentido no se altera. No así, si compramos las fórmulas $(\forall x)P(t)$ y $(\forall x)P(x)$, pues tienen significados diferentes. Por ejemplo, sea t una variable del lenguaje. Sea la proposición $(\forall x)(t = 1)$. Ciertamente, si reemplazamos t por x, obtenemos $(\forall x)(x = 1)$, lo cual admitimos por hipótesis que la anterior no está significando lo mismo que la inicial, ya que por analogía en cuestiones matemáticas no significan lo mismo. Veamos un ejemplo diferente. Tomemos en cuenta la fórmula $(\forall x)(\exists y)(x + y = 0)$. Es claro que en la fórmula $x + y = 0$, en la cual es libre x y y y por tanto libre x, en está última variable, si hacemos el cambio x por y, la fórmula expresaría otro significado. A saber, declararía $(\forall x)(\exists y)(2y = 0)$. Así, por K4, $(\exists y)(y = 0)$. Por último, a modo de ejemplo formal, examinemos la fórmula, donde A y B son símbolos de predicados.

$$(\forall x)A(x, y) \Rightarrow (\forall z)B(x, z)$$

aquí, por ejemplo $x + w$ no está libre para y. Sin embargo, $y + z$ está libre para y. En la intervención del lado derecho puedo reemplazar y por x.

Así, aproximadamente se dice ([HA]), que un término t del lenguaje puede sustituirse en alguna intervención libre de x en A, siempre que en t no aparezcan interacciones con cuantificadores de A.

Ahora, si se desvía la atención a la fórmula S2 de la Sección 3.1, entendemos que dicha fórmula es avalada por el Axioma K5.

Por último, veamos algunos teoremas del sistema formal que estamos atendiendo. **Teorema 4.** Sea A, B fórmulas bien formadas del lenguaje y sea Γ un conjunto finito o vacío de

Pol. Con. (Edición núm. 104) Vol. 10, No 3, Marzo 2025, pp. 536-556, ISSN: 2550 - 682X

fórmulas bien formadas. Si de las fórmulas $\Gamma \cup \{A\}$ se deduce la fórmula B, entonces de las fórmulas Γ se deduce la fórmula $A \Rightarrow B$

Esta demostración se realiza por inducción sobre el número fórmulas bien formadas en $\Gamma \cup \{A\}$. Se observa que usamos la palabra conjunto y unión de manera ingenua, debido a que los conjuntos son finitos, definidos con poca controversia. La demostración de este Teorema se detalla en [HA]. Aquí solo se mostrará el caso $K = 1$, dejando la lectura del teorema al lector acucioso, pues para realizarla se necesita otras definiciones que escapan del alcance del presente trabajo.

Demostración.[Caso $\mathrm{k} = 1$] Se supone que $\Gamma \cup \{A\}$ solo contiene una fbf. Por hipótesis tenemos que $\Gamma \cup \{A\}$ se deduce la fórmula B. Dados los axiomas de este sistema formal, la única posibilidad es que B sea un axioma, que B pertenezca a Γ o que B es A, por tanto, se sigue que $A \Rightarrow B$ es una fbf bajo este supuesto.

Teorema 5 (SH). Sean A, B y C tres fórmulas bien formadas. Si tenemos como teoremas $A \Rightarrow B$ y $B \Rightarrow C$, se sigue como conclusión que $A \Rightarrow C$

Demostración.

(1) Supongamos A (con el propósito de concluir C).

(2) Tenemos por Hipótesis: $A \Rightarrow B$

(3) Tenemos por Hipótesis: $B \Rightarrow C$

(4) Por MP, 1 y 2 se tiene: B

(5) Por MP, 3 y 4 se tiene: C

Así se tiene que $A \Rightarrow C$.

Teorema 6. Si x no aparece libre en A, entonces de la fórmula bien formada $(A \Rightarrow (\forall x)B)$ se puede deducir la formula $(\forall x)(A \Rightarrow B)$

Demostración.

(1) Por hipótesis: $(A \Rightarrow (\forall x)B)$

(2) Por K4 o K5 (dependiendo si es libre x o no en B) se tiene que $(\forall x)B \Rightarrow B$

(3) Por (1), (2) y el Teorema 5 (SH), se tiene que $A \Rightarrow B$

(4) Por el Axioma de generalización se tiene que $(\forall x)(A \Rightarrow B)$

Conclusiones

La conclusión a la que se llega en este artículo es que para dar cuenta de la matemática se debe analizar el lenguaje y formalizarlo. Para estudiar la lógica de este último se debe usar técnicas

Pol. Con. (Edición núm. 104) Vol. 10, No 3, Marzo 2025, pp. 536-556, ISSN: 2550 - 682X

finitistas, como definiciones por inducción generalizada y principios mayores. Este camino, es apropósito, el más recto que el autor han logrado vislumbrar, más seguramente no el único.

Referencias

1. [HA] Hamilton A. G. (1978). Logic for mathematicians. CAMBRDGE UNIVERSITY PRESS.
2. [AR] LIMA, Elon (1992), Curso de Analise, Volumen 1, Septima Edicion, Brazil, Instituto de Matematica Pura y Aplicada (IMPA), Projeto Euclides
3. [GEB] Douglas R. Hofstadter (1979). GODEL ESCHER BACH: Un Eterno y Grácil Bucle. Tradución de Mario Arnaldo Usabiaga y Alejandro López Rosusseau. TUSQUETS EDITORES, EEUU. Traducción: Mario Arnaldo Usabianga y Alejandro Lopez Rousseau. Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología. ISBN: 978-84-9066-069-0.
4. [ML] Joseph R. Shoenfield (1967). MATHEMATICAL LOGIC. Addison-Wesley Series in Logic
5. [SAA] Carlos Martín Collantes (1992). La Silogística Asertórica de Aristóteles. Historia de la geometría griega. Actas. Seminario. Historia de la Ciencia. Seminario "Orotava" Historia de la Ciencia, 199-216.
6. [ITC] José M. Muñoz Quevedo (2001). INTRODUCCION A LA TEORIA DE CONJUNTOS. UNIVERSDDAD NACIONAL DE COLOMBLA, Cuarta Edición.
7. [LLF] Carlos Ivorra Castillo (2002). LA LÓGICA DEL FINITISMO. https://www.uv.es/ivorra/Libros/LF.pdf.
8. [VE] FRANKLIN GALINDO y KRIS MARTINS (2005). LAS REGLAS DE IRVING COPI Y CARL COHEN SON UNA CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE DE LA VALIDEZ EN LOS SILOGISMOS CATEGÓRICOS DE FORMA ESTÁNDAR . EPISTEME NS, Vol. 25, № 1, 123-147.
9. [AL] José Alfredo Amor, (2004). LA ENSEÑANZA DEL ANÁLISIS LÓGICO. Facultad de Ciencias, UNAM, Curso, https://www.filosoficas.unam.mx/ Tdl/amor.htm.